WUWENJUNWENJI

# 吴文俊文集

山东教育出版社

# 吴文俊文集

山东教育出版社
一九八六年·济南

吴文俊文集

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

850×1168毫米32开本　12.5印张　8插页　276千字

1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷

印数 1—570

书号 13275·39　定价 3.95 元

# 前　言

本书收集了作者多年来发表的一些零星文章，散见于各种书刊。这里专门的创作论文收集的很少，因而严格说来，本书是一本杂文集，而不是通常数学家们以专门论著为主要内容的选集或全集。虽然如此，作者认为，这样的文集，至少对作者本人来说，要比出版一本或几本选集或全集，其意义要重要得多。因为它真正反映了作者对整个数学的认识，反映了作者思想的实质，也反映了作者对发展数学的主张和意图，而这是过于专门的选集或全集所难以做到的。

本书收集的文章分成四类。但除个别文章外，总的说来是一个整体。基本上它以数学机械化的思想贯通全书。第四类直接以数学的机械化为其主题。从数学有史料为依据的几千年发展过程来看，以公理化思想为主的演绎倾向，以及以机械化思想为主的算法倾向往往互为消长。对近代数学起着决定作用的解析几何与微积分，实质上都是机械化思想而非公理化思想的产物。中国的古代数学，乃是机械化体系的代表。第一类数学史，多少说明了数学机械化思想的渊源，也提供了某些具体的实例。第二类数学论证，则从不同角度阐述了作者对数学机械化的想法。至于第三类数学专论，表面看来似系专题论著而与机械化无关。但是，推行机械化的前提是数学必须以构造性的方式进行。这一类中主要的四篇文章就是以构造性的方式来讨论这些专题的。这与国外同样专题的多数论著有着本质上的区

别。这些文章也多少指出，通常以非构造性方式进行研究的某些数学领域，如果从构造性的角度出发，是有可能趋近于半机械化以至机械化并促使其实现的。

作为数学两种主流的公理化思想与机械化思想，对数学的发展都曾起过巨大的作用，理应兼收并蓄，不可有所偏废。但是对于个别的人来说，难免有不同的倾向。作者的倾向如何，应是不言而喻的。但是，作者关于机械化思想的形成，决非一朝一夕，至少在七十年代以前，机械化的概念在作者的脑海里还毫无踪影。经过对中国古代数学学习的触发，结合着几十年来在数学研究道路上探索实践的回顾与分析，终于形成了这种数学机械化的思想。这种思想一旦形成，就自然地化成一股顽强的动力。十几年来，作者一直在这一方向道路上摸索前进，艰苦奋斗，义无反顾。本书所收集的绝大部分文章，都写在这一时期，即是摸索过程中的产物。

我们的目标是明确的，即是推行数学的机械化，使作为中国古代数学传统的机械化思想，光芒普照于整个数学的各个角落。自然，我们离目标的实现还无比遥远根本看不到尽头。虽然如此，十几年来的努力尽管成就不多，但也已初见成效，至少已可说明这一机械的道路不仅是可取的，也是可行的。问题不在于能不能成不成，而在于愿不愿做不做，也在于肯不肯敢不敢。

个人的力量是渺小的。事业的成功与否，除了客观条件以外，主要依赖于群众的支持。众志成城，也只有众志才能成城。如果这本书能引起某些有志者的共鸣，乐意共襄此举，作者本人则大为欣慰，本书的出版也就不是多此一举了。

吴文俊

1986 年 12 月

# 目　　录

## 数　学　史

## 数 学 论 证



## 数 学 专 论

## 数 学 机 械 化

# 数 学 史

# 中国古代数学对世界文化的伟大贡献

自秦至西汉中期这两百来年间，我国工农业生产与科学技术有了很大的进步，从而促进了数学的迅猛发展，出现了一批高水平的数学家，如张苍、耿寿昌等。《周髀算经》、《许商算术》与《杜忠算术》(后二者已失传)，都在这时期出现。我国最主要的一部传于后世的数学著作《九章算术》，也基本上成书于西汉初年，其内容为以后一千多年的辉煌成就奠定了基础。从西汉以讫宋元，随着我国社会经济和劳动人民创造性发展，数学人才与数学创作仍世代不绝，中国的数学，在世界上可以说一直居于主导地位并在许多主要的领域内遥遥领先，直到宋末明初，宋明理学成为垄断一切的统治思想，明代并以八股取士，以及其他一些原因，科学技术的发展受到扼杀，除了民间的计算技术还有重要发展外，数学已相应地大为衰落。从明末利玛窦怀着不良企图以介绍西方数学为名打入我国统治集团内部以来，我国数学与古代相比已谈不上什么创造，基本上依靠国外的技术输入，在外国人屁股后面爬行了。正如毛主席批评的那样"言必称希腊，对于自己的祖宗，则对不住，忘记了。"西方的大多数数学史家，除了言必称希腊以外，对于东方的数学，则歪曲历史，制造了不少巴比伦神话与印度神话，把中国数学的辉煌成就尽量贬低，甚至视而不见，一笔抹煞。在半封建半殖民地社会中生活过来的一些旧知识分子，接触的数学都是"西方"的，看到的数学史都是"西方史家"的，对于祖国古代

数学十分无知，因而对于西方数学史家的一些捏造与歪曲无从辨别，不是跟着言必称希腊，就只好不吭声。

但是，被颠倒了的历史必须颠倒过来！

中国古代数学的成就在本世纪五、六十年代，或更早的中外中小学数学教本中，可找到许多具体的例子。

有一本西方数学史[12]，（这基本上是一本比较好的数学史）说："在许多中学中，代数学现仍被教成一堆公式而不是一种演绎的科学"。

在谈到代数学的东方起源时又说：

"今日学校中的代数学和几何学仍然保持这些不同来源的标志"。

这里所谓代数学的东方起源或东方数学，乃是针对"由一些定义、假定和公理到定理的一种严格逻辑的演绎法"作为处理问题准则的西方（或希腊）式数学来说的。这本书所说的东方，原意是指巴比伦或是印度，而事实上这个东方应指中国才算确当。

中小学数学中的算术、代数这些部分，从记数、以至解联立线性方程与二次方程，实质上都是中国古代数学家的发明创造，早就见之于中国的九章算术甚至是周髀算经等书。据钱宝琮考证（[13]），《九章算术》完成于公元50—100年间。但除个别片段外，基本内容应完成于公元前200年或更前一些（这是某些西方数学史家的意见。有的甚至提早到公元前1000年，例如[9]）。另一部《周髀算经》据钱宝琮考证([13])成书于公元前100年前后。

下面是关于算术代数部分发明创造的一张中外对照表，这里应该指出，表中虽列有印度的发明，但诚如一位印度数学史

专家 Kaye 所说的那样：印度与中国的数学有很多平行之处，而印度是欠了中国的债（参阅例如 Cajori，[6]，页 97 与 84，又如 Scott[9]）。

| | 中　　国 | 外　　国 |
|---|---|---|
| 位值制十进位记数法 | 最迟在《九章算术》成书时已十分成熟 | 印度最早在 6 世纪末才出现 |
| 分数运算 | 《周髀算经》中已有，在《九章算术》成书时已成熟 | 印度最早在 7 世纪才应用 |
| 十进位小数 | 刘徽注中引入，宋秦九韶 1247 时已通行 | 西欧 16 世纪时始有之，印度无 |
| 开平方、立方 | 《周髀算经》中已有开平方，《九章算术》中开平、立方已成熟 | 西方在 4 世纪末始有开平方，但还无开立方<br>印度最早在 7 世纪 |
| 算术应用 | 《九章算术》中有各种类型的应用问题 | 印度 7 世纪后的数学书中有某些与中国类似的问题与方法 |
| 正负数 | 《九章算术》中已成熟 | 印度最早见于 7 世纪，西欧至 16 世纪始有之。<br>所谓公元3—4世纪Diophantus 有正负数规则之说是有问题的 |
| 联立一次方程组 | 《九章算术》中已成熟 | 印度 7 世纪后开始有一些特殊类型的方程组<br>西方迟至 16 世纪始有之 |
| 二次方程 | 《九章算术》中已隐含了求数值解法<br>三国时有一般解求法 | 印度在 7 世纪后<br>阿拉伯在 9 世纪有一般解求法 |
| 三次方程 | 唐初（公元 7 世纪初）有列方程法、求数值解已成熟 | 西欧至 16 世纪有一般解求法、阿拉伯 10 世纪有几何解 |
| 高次方程 | 宋时（12—13 世纪）已有数值解法 | 西欧至 19 世纪初始有同样方法 |
| 联立高次方程组与消元法 | 元时（14 世纪初）已有之 | 西欧甚迟，估计在 19 世纪 |

中国劳动人民，在长期的实践过程中，创造与发展了记数、分数、小数、正负数以及无限逼近任一实数的方法，实质上达到了整个实数系统的完成。特别是自古就有了完美的 10 进位

位值制的记数法。这是中国的独特创造，是世界其他古代民族都没有的。这一创造对世界文化贡献之大，如果不能与火的发明相比，也是可以与火药、指南针、印刷术一类发明相媲美的。

代数学无可争辩地是中国的创造，这从《九章算术》等书中可以看出。可以说在16世纪以前，除了阿拉伯某些著作之外，代数学基本上是中国一手包办了。但中国古代数学的成就决不止于算术与代数方面，以几何而论，希腊欧几里得几何的拱心石是毕达哥拉斯定理（语出Bourbaki，[5]）或勾股定理。这一定理我国古代自然也早已有之。在《周髀算经》中就已有一般定理的叙述：

"若求邪至日者，以日下为句*，日高为股，句、股各自乘，并而开方除之，得邪至日。"

不仅如此，勾股定理还被具体用于勾股弦的直接互求，甚至应用于测日之高远这一类复杂问题。这与欧几里得几何中理论脱离实际的情况是迥不相同的。中国的几何学与希腊的几何学有许多不同之处，其详细比较有待阐发。

对于三角学中国也是最早发明者之一。西方数学史家一般都把《天文书》（Almagest）的作者托雷米（Ptolemy，公元150年左右）作为三角术的创始人，而把中国的三角术视为是受了他的影响。

但事实上，西方的三角术是先有球面三角后有平面三角。托雷米的三角术由测天而来，因而是球面三角术。至于平面三角术则迟至公元1250年才由波斯天文学家纳速剌丁所建立。但

---

* 勾股的勾字，古代均作句，本书引用的原文均用句。

我国一开始建立的就是平面三角术，并且中国的三角术来源于《周髀算经》。东西方三角术的发展途径是刚巧相反的，很难谈到有什么相互影响。如果说有影响，那么《周髀算经》早于《天文书》有好几百年，只有说托雷米受到中国的影响才更合情理。上面所引西方数学史家关于中国三角学之说显然是颠倒了历史事实。

在西欧，16 世纪中出现了不少描述三角测量的图画，其中有一张名为"鼓皮三角法"，所画犹如周髀赵爽注所附的日高图（也即重差原理图）的一个翻版，这也可以见到我国三角测量术的先进程度。（画见 Smith，[10]，页 355）

到西欧 17 世纪以后才出现的解析几何与微积分，乃是通向所谓近代数学的主要的两大创造，一般认为这些创造纯粹是西欧数学的成就。但是中国的古代数学决不是不起着重大作用(甚或还是决定性的作用)的。

先说解析几何， Smith([11]，页 316,）曾认为解析几何的发展有三个主要阶段：(1)座标系统的发明；(2)几何与代数间一一对应的认识；(3)函数 $y=f(x)$的图形表示。第一阶段属于古代，第二阶段属于中世纪，第三阶段则是近代的。

西方向来认为 17 世纪的 Descartes（以及 Fermat）是解析几何的创始人，但实际上在 Descartes 的有关主要著作中既无坐标也无坐标轴的概念，更无所谓直线与曲线的方程。Descartes 的贡献在几何与代数建立关系方面，在他的主要著作中，给出了二次方程的几何解法，但阿拉伯最早的代数学即 Al-Khowarizmi（花剌子模）的著作(公元 9 世纪)也早已用另一种较 Descartes 更好的方法给出了二次方程的几何解。事实上几何与代数的统一处理乃是我国古代数学的一个传统特色，从《九章算术》以来就向来如此。花剌子模的著作据 Cajori[6]

与希腊印度无关，如果不是阿拉伯自己的发明创造，则必然渊源于中国，从著作的风格看来，后者是不无可能的。这一段历史自然是值得重视并予以澄清的。现已知花剌子模在 842—847 曾出使波斯以北当东西方商业要冲的西突厥可萨国，而可萨通中国语，朝廷依中国礼仪（[13]，Addenda)，详情有待进一步调查。

至于第一阶段，西方数学史家比较一致地认为真正的坐标概念出现于 14 世纪中叶 Oresme 关于以“经度”、“纬度”来表示点的位置的一个著作。据 Smith 指出（[11]，页 320 注)，Oresme 的著作可能导源于 10 世纪时的一个作品。这里 10 世纪的作品估计应是阿拉伯的。在我国，《周髀算经》中已有“分度以定则正督经纬”以及“游仪所至之尺为度数”等语，注中并屡言“引绳至经纬之交，以望之。”中国又有世界上最早的星表（甘石星经，战国中叶，公元前三百五六十年），公元 2 世纪张衡就作星图与浑天仪，又有世界上最早的石刻星图(宋，公元 1247 年，在苏州)。我国的天文数学历来紧密结合。由此可以看到以经纬度表星的位置的这种座标概念我国是最早的创始人之一。我国又是罗盘的发明者并曾经是航海最发达的国家之一。用经纬度表位置的概念与方法在后来必然有所发展，其演变以及与阿拉伯西欧的关系，是值得把它追查清楚的。

微积分，这是使西欧数学一跃而居世界领导地位的重大发明创造，我国似乎是没有份的。但是微积分的发明从 Kepler 到牛顿有一段艰难的过程。在作为产生微积分所必要的准备条件中，有些是在我国早已有之，而为希腊式的数学所力所不及的。例如（见 Scott，[9]，页 138)：

“极限的概念，作为微分学的真正基础，对于希腊头脑来

说完全象是一个外国人。”

希腊数学中被认为最辉煌的创造之一的无理数论，对于极限来说是华而不实的。而刘徽以至宋代的我国十进位小数的记数法，却与极限概念一衣带水。十进位小数迟至16世纪在西欧重被发明以来，直接导致了对数的发明。作为微积分先驱者之一的Kepler,“广泛应用了对数与十进位分数，且热情地传播这方面的知识。”(Cajori, [6]，页160),是有一定的道理的。面积体积的计算乃是导致微积分发明的另一重要问题。然而，原来希腊欧几里得以至阿基米德所使用的“穷竭法”是很不得力的，Kepler用之劳而少功，直到伽利略的学生Cavalieri放弃了严密的穷竭法改用粗糙的不可分量法才取得了重大的突破。在微积分的创造过程中起了如此重大作用为西方数学史家盛称的所谓Cavalieri原理，事实上早就见之于祖冲之、祖暅父子的著作，即所谓“幂势既同则积不容异”并具体用之于球体积的计算，比Cavarieli的发现要早了1100多年。

微积分的发明从Kepler与Galileo以至Newton与Leibniz经历过一段艰苦漫长的过程。上面所举两个例子可以说明发明过程中中国古代数学的作用远优于希腊式的数学，我们甚至不无理由可以这么说，微积分的发明乃是中国式数学战胜了希腊式数学的产物。

中国古代数学至少自秦汉有记载以来，许多方面一直居于世界上遥遥领先的地位，发展到宋元之世，已经具备了西欧17世纪发明微积分前夕的许多条件，不妨说我们已经接近了微积分的大门。如果按此继续发展下去，我们是有可能先于欧洲发明微积分的。然而，宋朝的程朱理学已使当时的一些优秀数学家（例如杨辉）浪费精力于纵横图之类的数学游戏，陷入神秘

主义，违反了我国自古以来的优良传统，到了明朝八股取士，理学统治了学术界的思想，我国的数学也就从此一落千丈了。

西方数学史家往往以希腊式的严密推理相标榜，并以中国数学从来没有达到演绎科学的形式相指责。然而，我们已经看到，在微积分的发明上希腊形式的那种脆弱性以及中国式数学的生命力。某些数学史家例如 Bourbaki[5]也曾指出欧几里得的那种系统阻碍了代数学的发展并使之瘫痪。在将 Cavalieri 与亚基米德作比较时，Bourbaki 又指出亚基米德只能得到Cavalieri 原理很特殊的情况，而与 Cavalieri 作出他的原理用了不很科学的所谓“证明”相仿，亚基米德为了获得他的特殊情况的“证明”，也不得不把他著名的所谓亚基米德严密性弃之脑后。我国古代数学并没有发展出一套演绎推理的形式系统，但却另有一套更有生命力的系统。刘徽九章注序中说“析理以辞，解体用图”。刘徽海岛算经本来有注有图，注以析理，图以解体，只是已失传而已，这是古代数学用以分析矛盾解决矛盾的一种辩证思维方法。中国古代的劳动人民向来重视实际，善于从实际中发现问题提炼问题，进而分析问题解决问题，在深入广泛实践的基础上建立了世界上最先进的我国古代数学。中国的数学是牢牢扎根于广大劳动人民之中，是导源于劳动人民长期实践经验的基础之上的，这与希腊几何学脱离实际脱离群众走到纯逻辑推理的形式主义道路是有别的。这正是直至16世纪以前我国数学在许多最主要的领域内一直居于最先进地位的根本原因，也是在微积分的发明上中国式的数学远远优越于希腊式数学的根本原因。西方数学史家把它归之于我国数学的缺少演绎推理与历史事实完全不符。恩格斯曾经说过(见[1])：

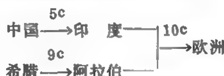
“数学演算适合于物质的证明，适合于检验，因为它们是建

立在物质直观（尽管是抽象的）的基础上的；而纯逻辑演算只适合于推理证明，因此没有数学演算所具有的实证的可靠性——而且其中许多还是错误的！”

这是我国数学对希腊式数学来说具有极大优越性的一个很好的说明。

钱宝琮在《中国古代数学的伟大成就》一文([4])中曾说：“第五世纪以后，大部分印度数学是中国式的，第九世纪以后，大部分阿拉伯数学是希腊式的，到第十世纪中这两派数学合流，通过非洲北部与西班牙的回教徒，传到欧洲各地，于是欧洲人一方面恢复已经失去的希腊数学，一方面吸收有生力量的中国数学，近代数学才得开始辩证的发展。”

这段数学发展过程可概括为下面的简图（c 表示世纪）：




根据前面的论证，我们认为有理由可以进一步说：近代数学之所以能够发展到今天，主要是靠中国的数学，而非希腊的数学，决定数学历史发展进程的主要是中国的数学而非希腊的数学。

以上抛砖引玉，论证粗疏不全之处，希望进一步补充阐发。论证偏激不当之处，则希望引起争鸣。

## 参 考 文 献

[1] 马克思数学手稿，北京大学学报专刊，1974 年 5 月。
[2] 算经十书（钱宝琮校点），中华书局，1963。
[3] 钱宝琮，中国数学史，科学出版社，1964。

[4] 钱宝琮，中国古代数学的伟大成就，科学通报，1951，2卷，10期，1041—1043。
[5] Bourbaki N., Eléments d'histoires des matheinatiques, 1969.
[6] Cajori F., A history of mathematics. 2nd ed, 1919.
[7] Datta B., Singh A. N., History of Hindu mathematics, 1962.
[8] Mikami Y, (三上义夫), The development of mathematics in China and Japan, 1913。
[9] Scott, A history of mathematics, 1958.
[10] Smith D. E., Source book in mathematics, 1929.
[11] ——, History of mathematics, 1925.
[12] Struik D. J., A concise history of mathematics, 1948.
[13] Needham J., Scicnce and Civilization of China, V. 3, 1971.

# 我国古代测望之学重差理论评介兼评数学史研究中某些方法问题

## 一、引　　言

《中国古代数学对世界文化的伟大贡献》一文曾经指出：

“代数学无可争辩地是中国的创造，……，甚至可以说在16世纪以前，除了阿拉伯某些著作之外，代数学基本上是中国一手包办了的”。

“中国的劳动人民……实质上达到了整个实数系统的完成。特别是自古就有了完美的10进位值制的记数法。……。这一创造对世界文化贡献之大，如果不能与火的发明相比，也是可以与火药、指南针、印刷术一类发明相媲美的”。

不仅在数学系统的完成上或是在代数学的创立上，就是在几何学上，我国古代也有着极其辉煌的成就。我国古代的几何学，立足于广大劳动人民的丰富实践经验，从天文观察与工农业建设中发现问题，提出问题，抓住了几何学的核心与实质，建立了具有我国特色的几何学体系。既有丰硕的成果，又有系统的理论，其内容有许多是微积分得以创立的关键所在，是希腊的几何学所未能做到的。但是大多数西方数学史家对几何学一向标榜欧几里得体系，推崇备至，而对中国古代的几何学则以为不足道，甚至认为一无所有。对此，我们有着截然不同的

看法。我国的数学工作者们，也应该认真调查、弄清事实以明辨是非，而不能把西方言论视为当然。

恩格斯曾经说过：

“和其它科学一样，数学是从人的需要中产生的；是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。”

我国古代人民，正如其他各地的许多古代民族一样，观天测地，从事土地的丈量、容积的测量、时间的计算等等生产活动，在此基础上创造了我国固有的古代几何学。从远古时期起，即有了一般形式的勾股定理，并应用之于测日之高远大小，具见《周髀算经》一书。秦汉时期又发展了勾股理论并导致二次方程，成为我国一千多年代数学蓬勃发展的主要源泉之一。到魏晋时期，《周髀算经》以之观天者，刘徽以之测地，建立了测高望远的重差理论。另一面，土地的丈量与容积的测量产生了面积与体积理论，并提炼出出入相补这一一般原理，到五世纪南北朝时期又提出了祖暅原理。这些一般原理的建立，说明了我国古代人民不仅能紧密联系实际，善于分析问题解决问题，而且有着高度的抽象与概括能力。不仅脱离实际把量度排斥于几何学之外的欧几里得所无法比拟，甚至也是虽重视实际但偏重技术缺少概括的阿基米德与海伦所不及。这些原理，不仅使欧洲直至 19 世纪末才弄清楚的体积问题早在祖暅时代即已具备了完满的基础，且为后世微积分的建立创造了条件，而且，与希腊欧几里得几何的形数割裂者恰恰相反，我国在数学发展过程中自始至终是把空间形式与数量关系溶合在一起的，因而数系统的建立与臻于完备，以及代数学的发生发展，也始终与几何学的发展贯串在一起。到宋元之世天元——也即未知数概念的明确引入，代数式与其代数运算的阐明，以及几何代数化方

法的逐渐成熟，更为解析几何的创立开辟了道路。诚如上篇文中所说：

"……到宋元之世，已经具备了西欧17世纪发明微积分前夕的许多条件。不妨说我们已经接近了微积分的大门"。

由于我国数学上成就之极端重要与丰富多采，即使只局限于几何学范围，也决非少数几篇文章就能阐明。本文将只就几何学成就的一个角落——重差理论作一分析介绍。抛砖引玉，希望其他同志能从各个不同方面与角度进一步深入阐发。

## 二、重差理论历史

由于中国古代经典著作中史料不为一般读者所知，流传不广又不易找到，故把有关重差理论的片段罗列于下，作为全文讨论的依据。

重差理论来源于量日之高远，而量日高远法主要见于公元前50至100年间成书的《周髀算经》，有关段落(《淮南子》(公元前120年左右)与《周礼·地官》也有类似的记述)如下：

"周髀长八尺，夏至之日晷一尺六寸。髀者，股也，正晷者，句也。正南千里，句一尺五寸，正北千里，句一尺七寸。……候句六尺。……故以句为首，以髀为股，从髀至日下六万里而髀无景。从此以上至日，则八万里。若求邪至日者，以日下为句，日高为股。句、股各自乘，并而开方除之，得邪至日。从髀所袤至日所十万里。"

除文字记载外，至今河南登封县告成镇即古阳城，还有周代观景台的遗址〔丙3〕。

三国吴人赵爽为《周髀算经》作注，作有《日高图》与《日

高图说》。《日高图说》全文如下：

“黄甲与黄乙其实正等。以表高乘两表相去为黄甲之实。以影差为黄乙之广而一，所得则变为黄乙之表，上与日齐。按图当加表高。今言八万里者，从表以上复加之。青丙与青己其实亦等。黄甲与青丙相连，黄乙与青己相连，其实亦等。”

赵爽日高图的原图早已遗失。现传各本中原图俱误，如图1。钱宝琮依据该图与赵爽注文重绘如图2。

公元三世纪魏刘徽作《九章算术注》。序中说：

“……〈周官〉大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中。说云，南戴日下万五千里。夫云尔者，以术推之。按《九章算术》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差。句股则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其

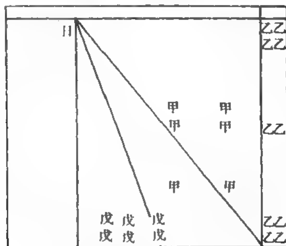



图1

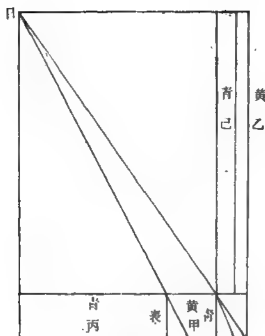



图 2

正中之景。以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地为句股。为之求弦，即日去人也。……虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。”

这一序中概括了日高理论中的三个基本公式（《周髀算经》与刘徽《九章算术注》中求日径的部分都已略去）。

$$日去地=\frac{表高\times表间}{景差}+表高,$$

$$南戴日下=\frac{南表景\times表间}{景差}$$

$$日去人=\sqrt{(南戴日下)^2+(日去地)^2}$$

刘徽把这一量日高的理论施之于量"泰山之高与江海之广","辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下"。原来这一重差理论是作为《九章算术注》十卷中的第十卷附于勾股章之后的。唐代把第十卷重差和九章分离而另本单行，改称《海岛算经》。原作有注有图。但此后注图都已失传。现存《海岛算经》只剩九题，其中第一题望海岛照录如下：

"今有望海岛。立两表齐高一丈，前后相去千步。令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何。

术曰：以表高乘表间为实。相多为法，除之。所得加表高，即得岛高。

求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之，得岛去表里数。"

按我国古算书中的"术"可泛指方法、定理、公式或理论。这里的"术"所涉及的理论可概括为下面两个基本公式：

$$岛高=\frac{表高\times表间}{相多}+表高,$$

$$前表去岛=\frac{前表却行\times表间}{相多}$$

这两公式也即前面关于日高的基本公式，也可与《周髀算经》以及赵爽《日高图说》相对照。

《海岛算经》其余八题依次是：

2．望松　3．望邑　4．望谷　5．望楼　6．望波口　7．望清渊　8．望津　9．临邑．诸题不论是重表、累矩、三望、四望，都是从不同测点获得不同的测望数据，相互较核，取其差值为法而给出明显公式。所依据重测取差的方法原则各题是一致的，与重差之名正相符合。为此，我们将把这一测望理论称为重差理论，所得诸公式统称为重差公式。在各个特殊情形则将称为日高公式、海岛公式、松高公式等等。

## 三、后代关于海岛公式的证明

刘徽的《海岛算经》原来有注有图。"析理以辞，解体用图"，所谓注即相当于现代的分析与证明。可惜注图都已遗失。后世以迄近代有不少中外人士曾补作证明。现择其重要者依历史先后次序介绍于下，再于下节讨论其正误得失。

现存最早讨论《海岛算经》诸题的证明者见于宋杨辉的《续古摘奇算法》（公元1275年）。杨于书末有海岛题解云：

"魏刘徽注九章，立重差，著于句股之下，以阐世术。夫度高测深，句股之法则，无自而可知。故重表、累矩、三望、四望，旁求审察。是以松山高下，方邑大小，其重表也。岸望谷深，山望津广，其累矩也。登望松高，遥望波口，非三望之术乎。清渊白石，登山临邑，非四望之术乎。海岛去表为之，篇首因以名之，实九章句股之遗法也。"

"迄今千余载间，唐李淳风而续算草，未闻解白作法之旨者。辉尝置海岛小图于座右，乃见先贤作法之万一。若欲尽传，岂不轻易秘旨。或不传流，亦无以伸前贤之美。本经题目广远，

难于引证，学者非之，今将孙子度影量竿题问，引用详解，以验小图。姑以一问，其余好学君子自能触类而考，何必轻传。”

杨辉的另一现存著作《乘除通变本末》上卷（1274年）中也说：

“海岛题法，隐奥莫得其秘。李淳风虽注只云下法，亦不曾说其源。《议古根源》(12世纪刘益著，现已失传）原无细草，但依术演算，亦不知其旨。”

观此，杨辉认为没有必要给出《海岛算经》九问的全部证明，而着重在望海岛第一题的详细分析：“姑以一问”，“解白作法之旨”，而“说其源”，以“见先贤作法之万一”。其余则留待“好学君子”“触类而考”。从“尝置海岛小图于座右”与“以验小图”等语，可能杨辉所见即系刘徽原来的“海岛小图”，至于现存杨辉的原图则大体如图3。杨的分析是把图三分解成两个小图即图4、5，每图相当于一个较简单的孙子度影量竿问题。杨并指出证明的依据可归结为下述原理，即杨所说的“源”：

“凡股中容横，句中容直，二积皆同。”换言之，即图4、5中的

面积甲＝面积乙。

明末（16、17世纪之交）西方殖民国家的先遣部队耶稣教会教士为便于传教以奴役中国人民，借宣扬数学历法等科学文化之名而进入明室宫庭。由于明季八股取士，理学统治了学术界的思想，科学技术的发展受到摧残，当时中国古代的传统数学几已失传。士大夫如徐光启等为传入的西方天文历算所惑，与来华教士利玛窦等争相结纳，除翻译《几何原本》外，又译《测量法义》(1607-8）一书。《测量法义》共15题，书前题有利玛窦口授，徐光启笔受。该书主要介绍欧洲的测量方法，而其

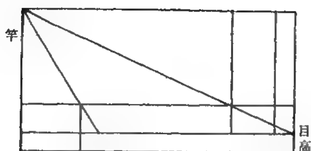


图 3



图 4

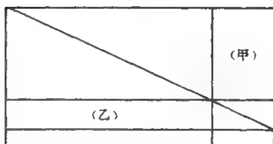


图 5

中第 10 题以表测高的后面部分所谓“欲测甲乙之高，……若戊不欲至乙或不能，则用两表较算……，”其内容即与《海岛算经》第一题无异（图 6 ）。

在《测量法义》之后，徐光启又著《测量异同》。序言中说：

“九章算法句股篇中故有用表用矩尺测量数条。与今译《测量法义》相较，其法略同，其义全阙，学者不能识其所由。既具新论，以考旧义，如指掌矣。今悉存诸法，对题胪列，惟求同异，以竢讨论。其旧篇所有，今译所无者，仍补论一则，共为测量异同六首如左。”

文
俊

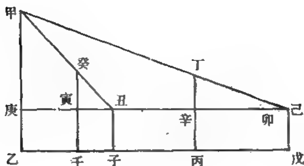



图 6

《测量异同》中所列六首中第 4 首以重表兼测无远之高、无高之远以及第 6 首以重矩兼测无广之深、无深之广，即《测量法义》中的第 10 题后面部分也即《海岛算经》的第一题。

不论是利玛窦口授的《测量法义》或是徐光启补作的《测量异同》，在证以表测高题即海岛公式时，都用相似三角形与比例，并引述《几何原本》中的命题。《测量法义》中的证明依自戊向前抑退后至子而分成两种情形，又比较两影的长短，叙述颇为繁琐。《测量异同》证明与此类似。现将《测量法义》中证明的主要部分介绍如下，见附图 6 戊向前至子的情形，其中丙丁与壬癸为表，己、丑为人目：

| | |
|---|---|
| 由相似三角形得 | 己辛:辛丁=己庚:庚甲， |
| 交换比例项得 | 己辛:己庚=辛丁:庚甲， |
| 同样 | 丑寅:丑庚=寅癸:庚甲， |
| 因辛丁=寅癸，故 | 丑寅:丑庚=辛丁:庚甲， |
| 在己庚上取点卯使 | 己卯=丑寅， |
| 则得 | 己辛:己庚=己卯:丑庚， |
| 由比例定理，得 | 己辛:己庚=卯辛:己丑， |
| 与前第二等式比较得 | 卯辛:己丑=辛丁:庚甲， |

交换比例项得　　　　卯辛:辛丁=己丑:甲庚,

或　　　　卯辛:辛丁=子戊:甲庚,

即　　　　两测较:表目较=距较:甲庚,

由此得甲庚之高。

加目至足之数,即得甲乙之高。

在清初数学这一阵地实质上已为西算所完全占领,我国古代传统数学几成绝学。直至乾隆三十八年(公元1773年)开始编辑《四库全书》,古典数书陆续发现,引起了研究古典数学的高潮。十九世纪初李潢作《九章算术细草图说》与《海岛算经细草图说》,为《九章算术》注疏作图并补出证明。李的《重差图序》说:

"图九。望海岛旧有图解,余八图今所补也。同式形两两相比,所作四率,二、三率相乘与一、四率相乘同积。如欲作图明之,第取一、三率联为一边,又取二、四率联为一边。作相乘长方图之,自然分为四幂。又以斜弦界为同式句股形各二,则形势验矣。旧图于形外别作同积二方,至两形相去辽远者,又必宛转通之,皆可不必也。图中以四边形五边形立说,似与句股不类。……"

从李潢序可见李也曾见过"望海岛旧图"。可惜现存李潢著作中"旧图"已无,而代之以李所补作之图。现将李所作海岛题的图(图7)与证明大意概述如下:

在图7中甲乙为海岛,丙丁与己庚为前后两表,戊与辛为着地人目。作己壬与丙戊平行,则因△己庚辛∽△甲辰己,与△己庚壬∽△甲辰丙,得辛壬:己庚=己丙:甲辰。故

$$甲辰=\frac{己庚\times庚丁}{辛庚-戊丁},$$即得岛高公式。

若与利玛窦、徐光启的证明比较，可见李多添了一条平行线，至于其他诸题的证法也类似，但添线更多，推理更繁。

近几十年对《海岛算经》诸题的证明则往往应用代数。例如三上义夫在《中日数学史》一书介绍《海岛算经》时说（图8）：

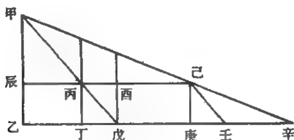


图7

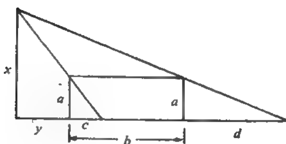


图8

海岛术文相当于公式

$$山高\ x=a+\frac{ab}{d-c},$$

$$去山远\ y=\frac{cb}{d-c}。$$

三上自言不知刘徽用什么方法获得这两公式，但认为可能自下两比例式或与之相当的等式导出：

$$\frac{x}{y+c}=\frac{a}{c},\quad \frac{x}{y+b+d}=\frac{a}{d},$$

并认为“重差”一词意指比例的重复应用，而比例方法在《九章算术》勾股章中多次出现，以为上说佐证。三上还因此说：

“刘徽对这些复杂问题的研究，说明他对代数处理的某些方面颇为娴熟。如果对《九章算术》中某些章节的内容细加推敲，我们就不能不把代数学的诞生，归功于中国在它历史上早期的数学家们。这个时期比秦九韶与李冶出现的十三世纪要早得多，而一般（按应指西方数学史家）相信秦李之时才是中国代数学诞生的时代。正因为如此，所以我们特别强调刘徽关于这些复杂问题的考虑，它们出现于公元三世纪时，在天元术代数学曙光初露之前整整有一千年。”

近代如李俨、钱宝琮等对《海岛算经》诸题都有注释与证明〔乙 1-7〕。但他们的证明基本上沿袭利玛窦、徐光启与李潢之法，添作平行线(与)用相似三角形，或如三上义夫那样应用代数符号列出方程并进行代数运算以求解。有人还甚至应用了三角函数来证明。国外一些学者如李约瑟等也大都用类似方法。但有别于此，特别应该提到的是李俨在《重差术源流及其新注》〔丙 1〕一文中关于杨辉海岛公式分析的一个介绍。现将李俨此

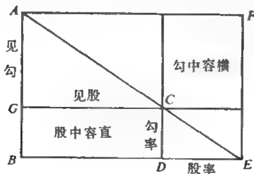



图 9

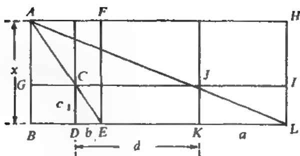



图 10

说全文照录如下（图 9，10）：

“其法于 $ABE$ 直角三角形（参阅图 9 ——编 者），知 $AD=$ 勾，$BE=$ 股，$AE=$ 弦；$CD=$ 余勾，$DE=$ 余股，而 $AE$ 弦之内外。分二勾股；其一，勾中容横，如 $CF$ 长方形，其一，股中容直，如 $BC$ 长方形，二积之数皆同，即 $\square BC=\square CF$。故

$$AG=\frac{BD\times CD}{DE}。$$

于海岛第一题（参阅图 10——编者），因 $\square BC=\square CF$，而 $DE=$ 小余股；又因 $\square BJ=\square JH$，而 $KL=$ 大余股，故 $\square BJ-\square BC=\square JH-\square CF$，即 $\square DJ=\square JH-\square CF$，即 $CD\times DK=(KL-DE)\times AG$；$\therefore c_1\times d=(a-b)\times AG$，即 $AG=c_1\times d/(a-b)$，而 $x=\frac{c_1\times d}{a-b}+c_1$ 矣。

明利玛窦、徐光启译《几何原本》其第一卷第 43 题称“凡方形对角线旁两余方形自相等”。辉所取者，岂此义也”。

## 四、对这些论证的评论

上节所列举各家的论证，我们认为除杨辉的论证以及李俨

对杨辉的论证所作解释以外，其他则不仅与中国古代几何学的真意不符，说得严厉一些，可以说所举证明都是“错误”的。

上列各家证明除杨、李的论证外可分两大类。其一是添一些平行线或（与）利用相似对应边成比例等定理。其二是把所求高远作为未知数用 $x$，$y$ 等表示，依相似三角形列出代数方程而求解。

先就第一类证明来说。平行线与相似形理论都是欧几里得几何学中的重要构成部分。这些原始直观的概念自然会以某种形式出现于我国古代几何学中，事实上也确是如此，但显然从未占据象在欧几里得系统中那样特殊的地位。就作者的调查，在我国经典算术中只发现宋秦九韶《数书九章》(1247年)中第六卷田域类漂田堆积题的附图中添有一条平行线。但这在我国古代文献中似是一个例外。且术文无法理解，不能用一般相似三角形边成比例的定理来解释。Libbrecht〔A 6〕曾指出后人必有篡改。附图的来历有待查明*。不论如何，我国古代几何学自有其独特的体系，从内容到方法都与欧几里得体系异其旨趣。我国从来没有象西方那样在一条还是几条平行线上纠缠不清而另有发展重点，这正好说明我国几何学的特点与其高超之处。

就在同一书《数书九章》中，第七、八两卷测望九问大都与《海岛算经》诸题类似，其中望山高远一题更与望海岛题类同，而附图残缺。宋景昌在读《数书九章》后所作《札记》中

---

* 补记　现查知，据宋景昌《数书九章札记》。现存图为后人改作，已非《永乐大典》中原图，平行线系沈钦裴所添入。《札记》引沈氏之言曰：“更增一虚线，与……平行，则比例之理显矣”。这又一次说明古希腊的平行线理论与我国古代几何无缘。那种随便依据欧几里得几何来解释我国古代几何的做法都是极为错误的。

依据明《永乐大典》将该图补入。图中并无平行线(图 11)。利玛窦与徐光启在《测量法义》与《测量异同》的证明中也无平行线之设。直到李潢证中才出现一条平行线。可以想见平行线的添入是直到欧几里得几何在我国知识分子中已牢牢扎根的清代才想到使用的。这说明钱宝琮在重绘日高图时所添的一条平行线（图 2 中右下方）远远脱离了我国古代的实际情况。它的添入是毫无根据的。

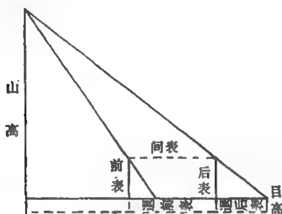



图 11

至于相似形理论，则相似勾股形对应勾股成比例的命题在我国有着悠久的历史。不仅刘徽《九章注》勾股章 自 第 14 题以下至最后第 24 题的证明中每题都曾用到这一命题，早在《周髀算经》中即已是求日径方法的依据。但在古籍中并未见到有一般相似三角形的论述。应用一般的相似三角形来证明《海岛算经》诸公式也是缺乏根据的。

因之第一类的证明可以认为是利玛窦等传入西算以后我国自徐光启以下应用西方欧几里得几何所作，而与中国的古代几何学并不相干。这些证明往往要添许多平行线，推理过程也颇

繁复而不自然。例如钱宝琮就曾评论过李潢的证明："图中添线过多，恐不能符合刘徽造术原意。"李潢在《重差图序》中自己也说："图中以四边形五边形立说，似与勾股不类。"事实上，欧几里得几何学演绎体系的一个根本弱点，是它难以据此以获得新事实。如果事先没有其他方法得到正确结论，即使要证也无从证起。以《海岛算经》诸题公式之复杂以及测量方式之奥妙，如果没有一个深邃的思想作为指导，是很难得出这些公式来的。而这正是欧几里得体系所无能为力的。

第二类代数方法的证明则更一无是处。代数学是我国独特的创造之一，自《九章算术》以至宋元发展线索极为分明。但未知数作为一个独立而明确的概念出现，则是在宋金时代十二、三世纪时，即所谓天元一。从一个未知数到几个未知数、列出方程以及各种代数式的运算规律则一直到元代始集其大成。毛主席曾指出，从认识的感性阶段上升到理性阶段以及新概念的产生，都是一种认识上的飞跃。从《九章算术》的线性联立方程以及某些二次方程的雏型到天元一以至近代的代数符号系统与运算体系要经历过多次这种认识上的飞跃。每一次飞跃都要在大量实践活动的基础上经过相当长的时间往往几十百年之久才能出现。用现在通行的代数学对古代的数学作一些单纯的注释以方便现代读者自然是无可厚非也是既值得做又应该做的工作。但若据以推理，以现代数学来代替一千多年以前的数学，则是绝对不能允许的。

即如以三上义夫对《海岛算经》的解释来说，三上所举：

$$\frac{x}{y+c}=\frac{a}{c}\text{与}\frac{x}{y+b+d}=\frac{a}{d}$$

两个比例式，应用了相似勾股形的比例关系。后者屡见于《九

章算术》勾股章的刘徽注中，这里$x$，$y$，$a$，$b$等可作为“山高”，“去山远”等等的简写，自然是可以的。但三上从这两式作一些代数运算以导出$x$，$y$并据以说刘徽已拥有宋元时期的一些代数学知识，则是缺少根据而是违反时代的。三上针对当时许多西方数学史家往往一笔抹煞中国古代数学成就的帝国主义作风，依据他对中国古代数学比较丰富的知识来予以驳斥，这种坚持正义的精神中国人民应给以高度评价。尽管如此，他的论证不仅不符合实际情况，还应认为是“错误”的。

至于用三角函数来证明《海岛算经》诸题则更可不必讨论。

总之，那种用现代代数方法来证明《海岛算经》诸题的尝试在方便现代读者来说自然有其积极意义的一面。但此外则充其量只是用现代方法验证了刘徽的那些公式与定理都正确无误而已。这非特完全不足以反映当时的数学情况，反而使古代辉煌的成就因之而淹没不彰。这正象用17世纪以来的微积分这一现代化武器把阿基米德计算抛物线弓形面积的公式重新证明一遍。这在现代自然是轻而易举的事，对稍学过一些微积分者也只是一个简单的练习。但若因此而得出结论说阿基米德的结果与定理没有错，则不但没有什么意义可言，甚至颠倒了历史，反而把阿基米德的重要贡献贬低了。

## 五、数学史研究中的方法问题

我们所以不惜用大量篇幅列举海岛公式的后代各种证明，指出它们的不当之处，并且强调除个别如杨辉、李俨另当别论外，这些证明特别是滥用代数符号者都是“错误”的，乃是因为这

些错误方法已泛滥于绝大多数流行的数学史著作之中，致使古代数学的真实情况不仅淹没不彰，而且面目全非，许多巴比伦神话、印度神话以及丢番图神话之所以产生，这是重要原因之一。下面是一个典型的例子。

斯特洛伊克的《数学简史》〔A 14〕在论及公元前近二千年巴比伦的数学时，举出了一个记载于巴比伦泥板的例子：

由两个正方形并组成一个面积为 1000，一正方形边为他正方形边的 2/3 减 10。两正方形的边如何？

根据这一类例子作者就下结论说：

"汉穆拉比时代的巴比伦人已完全具有了处理二次方程的技术。他们能解两个变数的一次和二次方程，甚而至于包括二次和四次方程的问题。"

另一个数学史家 Scott 在这一问题上他所著《数学史》〔A 11〕11 页第 1 行虽然也有其他类似的谬论但态度要严肃些。现把《数学史》中有关的一段译述如下，以与上文对照：

> "巴比伦人曾被认为具有解从两个未知数得出二次方程的方法的知识。这种论断是由于他们企图解决下面的问题而产生：已知长方形的周与面积，求它的边，即解方程组 $x+y=a, xy=b$（作者注：这种等同是一种大错误）。这种问题在古代是很普遍的；这可能是为了否决某种广泛流传的信念而引起；这种信念认为一个平面形的面积由它的周界所完全决定，正象在圆与正方形的情形那样：相同周界的图形具有相同的面积。只要这种信念依然存在，丧失道德的商人们就有无限的机会。这个问题曾被希腊人有系统地处理过（作者注：这个说法是不正确的）。至于巴比伦人的方法则是经验的（作者注：重点是作者所加）。他们的方

法是把周界保持不变而把面积所能取得的不同数值确定出来。例如对一个周长为 40 的长方形来说，结果可列表如下；

$$a+b=20$$

| $a$ | $b$ | 面积 $ab$ |
|---|---|---|
| 10 | 10 | 100 |
| 8 | 12 | 96 |
| 6 | 14 | 84 |
| 4 | 16 | 64 |

如此等等。”

我们把两个数学史家著作中的某些片段并列如上，读者们可相互比较，自己作出结论。

古代巴比伦人就象古代许多其他民族一样，从事各种生产活动，观察天象，进行计算，为此付出了辛勤劳动。他们对科学文化所作贡献在我们现代的日常生活中还留下痕迹，留传至今的巴比伦泥板上各种天文数表的记录都是人类伟大的文化遗产。但是，一切科学归根结底都来自生产实践也受着当时生产条件的制约而不能超越时代。知道长方形的周长与面积以求边这一类问题，在古代许多不同民族中本来是会自然产生的。但生产的发展会推动数学的前进，随之而在这类问题的解法上也会显出先后进展的痕迹。试以我国为例。以有书可稽的标准来说，则赵爽《句股圆方图说》包括了二十来个定理，其中最后一个定理即是已知勾股和与勾股积求勾与股的明显公式。在《九章算术》勾股章中更有不少比它复杂得多的问题与解法。但这些解法都是纯几何的，大都依据出入相补原理。自此以后，仍以有书可稽者为准，则杨辉在《田亩比类乘除捷法》卷下(1275年）所引刘益《议古根源》(12 世纪）的 22 问中，有 8 个都是

已知直田长阔和或差以及直田田积要求长阔一类的问题，所用方法都是增乘开方法。到朱世杰《算学启蒙》(1299年) 开方释锁门共34问中，第8至第11四题也是这一类问题，但已进步到使用天元术。据朱世杰原注：谓"按此以古法演之"，除重述了前面所引见于赵爽《句股圆方图说》中的"古法"外，并说："今以天元演之，明源活法，省功数倍"。在《算学启蒙》(1299)中，朱世杰还只用一个未知数天元一，到了《四元玉鉴》(1303年)，则在两仪合辙门的12个同类问题中，朱都列天元地元两个未知数的联立方程组来求解。我国古代算书散失者多而留存者少。但即就现有存书有案可稽者来说，从《句股圆方图》与《九章算术》的几何解法到朱世杰联立方程组的解法，发展线索仍极为分明。其间相隔一千多年，不知要经历多少次认识上的飞跃才能达到。单是从贾宪、刘益的增乘开方到李冶的天元术，再从一个未知数的天元术到两个未知数的天地两元之术，每一步都是极不容易的发明创造。这本来符合马列主义的认识论而是科学发展的客观规律。我们可以说《句股圆方图说》与《九章算术》中的几何解法是导致我国宋元代数的某种源泉与滥觞，起过一定的推动启发作用，但决不能贸然视之为就是代数学。正是同样的理由，尽管我们尊重古代巴比伦人的伟大成就，但是把近代的代数轻易地加之于古代巴比伦人身上，不能不说是十分荒谬的。

## 六、《海岛算经》的发展与影响

自刘徽以后，虽然史料残缺，但《海岛算经》直到明末仍有踪迹可寻，现根据不完全调查而有书可稽者摭述如下：

天文观察上重差方法的应用散见于历代史书中天文志、律历志以及天文著作中。

《隋志》、《唐志》都提到有《九章重差图》一卷。

唐初王孝通《辑古算经》表称“徽…造重差之法”。

唐初将刘徽《九章注》第十卷重差那一卷单行而改称为《海岛算经》，立于学官，成为《十部算经》的一部。

南北朝祖冲之、北周甄鸾、唐李淳风等都曾为《周髀算经》或（与）《海岛算经》作注。

南北朝何承天、隋刘焯、唐李淳风等对《周髀算经》量日影“句之损益寸千里”以及其后张衡、郑玄等从其说者多有所批判。历代曾为此去全国各地实测晷影，远至交趾地区，尤以唐一行与元郭守敬的规模与影响最大。

唐李淳风注《周髀》，批评“用日以为高下”为“语术相违，是为大失”。李又推广原求日高术到“地有高下”不平的情形，就“表望不同”作“后高前下术”等六术。

《宋史》载有《海岛算经》一卷，与夏翰《新重演议海岛算经》一卷。

《宋史》（卷 462，方技）谓楚衍（11 世纪初）“于《九章算术》…《海岛算经》诸算经尤得其妙。”按早期的高次方程数值解法即增乘开方法的开创者贾宪（11 世纪）是楚衍的弟子。

宋秦九韶《数书九章》（1247 年）第七、八两卷为测望九问，第十六卷有军旅类的望知敌众，其中陡岸测水、表望方城、望敌远近与表望浮图诸题，秦都说“以重差求之”或“重差入之”。而望山高远一题更与《海岛算经》第一题海岛无异，但改《海岛算经》中的人目著地为目高 5 尺。

宋杨辉现存算书中曾三引《海岛算经》，并对海岛一题进

行分析（见前节)。从所说“尝置海岛小图于座右，乃见先贤作法之万一”，推想杨辉还见到过刘徽至少是海岛一题的原图。

南宋有《海岛算经》刻本，据杨辉引述现传本与南宋刻本除先后次序可能有不同外内容无异。

元朱世杰《四元玉鉴》(1303年）中卷勾股测望门八问中第4至第8依次类同于《海岛算经》中的望海岛、望松、望邑、望谷与望清渊诸题。

明《永乐大典》(1403—1408年）收有《海岛算经》，现在的传本即从其中辑出。

明吴敬《九章算法比类大全》(1450年）引用了《海岛算经》题称为“古问”。

明周述学《神道大编历学算会》(1558年）卷3勾股有两题与《四元玉鉴》勾股测望门第5，第8两问题目数据全同，而这两问又与《海岛算经》中的望松与望清渊两题类同。

明程大位《算法统宗》(1592年）卷九勾股章之末重述了杨辉对海岛一题的分析。

明末利玛窦、徐光启关于测量的译著都有重差一类问题，已见前节。详细分析见下面第八节。

清李潢《重差图序》中说：“望海岛旧有图解”，可知直到19世纪之初李潢时还可能见到原来的海岛残图，具见前节。

刘徽《海岛算经》的原来理论与证明可能在唐宋时期即已鲜有人知而失传，这从杨辉据图以求“源”可以推知一二。但《海岛算经》却在另一方面对我国的数学起着巨大的推动作用并影响及于后世近代数学的发展。

宋元之世我国数学有着多方面的重大成就，天元术的创立是其中之一。一般认为高次代数方程数值解法是宋元时期数学

发展高潮的顶峰。国外对我国古代数学所推崇的主要是祖冲之圆周率以及这一成就。但是，我们认为与天元术相伴而生的几何代数化、代数方法在几何上的应用以及代数式的使用与代数运算的系统化等要比这一成就意义重大得多。而重差理论在这方面所起的作用是不小的。检查一下天元术与重差理论的有关论述可以为它们的相互关系提供一些线索。

首先是秦九韶的《数书九章》。按秦著中测望九问与望知敌众十个问题都有术无法，不仅立术不明，抑且谬误极多。有几题虽提到用重差求之，实则与重差术并无关系。这些都说明秦本人对勾股之术不甚娴熟，对重差之术更不理解，而且疏忽大意，但不能因这些瑕疵而抹煞其主要功绩，按测望问题在秦全书中所占份量颇多，在《海岛算经》之后我国算书中还是第一次作这种较有系统的收辑，足见秦的重视。测望九问之中，有四问都用列高次代数方程求解。虽然据钱宝琮意见，秦对天元术似乎并不了解，但从《九章算术》勾股章第20出方邑望木题的开带从平方历经唐王孝通开带从立方与宋贾宪增乘开方一脉相承，应无疑为天元术的前身，虽无天元之名而有天元之实。秦之测望九问显示出与解高次方程以及天元术的密切关系，秦的这一功绩应予肯定。

至于朱世杰《四元玉鉴》勾股测望八问则全部用天元术求解。在八问中第五问以下都与《海岛算经》诸题类同，其他三问都与勾股，也与秦的某些问题相似。这些问题显系从《九章算术》勾股章出方城诸题推衍而来。只是有时改方城为圆城问题要难得多，非单纯的勾股术所能解，因而也促进了天元术与一般代数运算方法的发展。东汉末郑玄引郑众说“今有重差句股”。刘徽也说“辄造重差…缀于句股之下”。重差与勾股本来是密切相关的。在朱之前早在12世纪之中，勾股问题就已成为

天元术重要的问题来源。例如在杨辉《田亩比类乘除捷法》(1275年）一书中编入了已失传的刘益所著《议古根源》（12世纪）二百问中的二十二问，其中有两问都是用天元术求解的勾股问题。李冶的《测圆海镜》（1248年）与《益古演段》（1259年）则全都是以勾股为主题的天元术应用。由此可见勾股曾为天元术提供了许多具体的问题实例。重差术估计也起着同样的作用。现将朱世杰《四元玉鉴》勾股测望门第4题望圆城也即《海岛算经》的望海岛题朱氏的术与草照录如下（略去求表去城部分），以与海岛术相比较：

朱世杰原文

术曰：

立天元一为城高

如积求之，得一千四百四十为正实，四十为益方

上实下法而一，得高。

草曰：

立天元一为城高

又为大句

以两表退行相减，余四十尺，为两表退行差。

又为小股

用乘大句，得 太 ||||0 寄左

乃以两表退行差加表间得一百二十尺为大股

以表高为小句

现代语言译文

解法：

置城高 $=x$

列方程得

$-40x+1440=0$

解之得 $x=\frac{1440}{40}=36$ 尺

置城高 $=x$

大勾 $=x$

两表退行差 $=$

后表退行 $-$ 前表退行

$=40$ 尺

小股 $=40$ 尺

左 $=$ 大勾 $\times$ 小股 $=40x$

大股 $=$ 两表退行差 $+$ 表间

$=120$ 尺

小勾 $=$ 表高 12 尺

| | |
|---|---|
| 乘之，得一千四百四十为同数， | 大股×小勾＝1440与左相同 |
| 消左得 丨三\|\|\|\|0 / \|\|\|\|0 | 移项整理得 $40x-1440=0$ |
| 上实下法而一，得三丈六尺为城高。 | $\therefore$ 城高 $x=\frac{1440}{40}=36$ 尺 |

《四元玉鉴》其他诸题解法仿此。据此我们认为重差与勾股一样，对天元术的发展都不仅有刺激推动作用，甚至还是重要的源泉。而且，重差诸题的解法只涉及一次方程即所谓开无偶平方，实质上又与刘徽的原证相同（详见下节的分析），只是改用了天元术的语言而已。相反勾股一类问题所引出的方程往往是高次或（与）多元的，要复杂得多。因而重差之成为天元术实例，实际上更容易更简单，出现得也可能较早。只是数书大都失传，作为《四元玉鉴》前身而为祖颐为朱所作序中曾经提到的《益古演段》、《照胆》、《钤经》、《如积释锁》、《〈如积释锁〉细草》《两仪群英集臻》、《乾坤括囊》等书内容都已无法考查，不能追踪重差与天元术的关系而为之确证而已。

三上义夫曾认为刘徽已能用代数方法证《海岛算经》诸题，我们指出过这个说法是不成立的。三上以及其他人士例如李俨等在用代数方法证明时，都列出两个未知数的方程组求解。从现代的知识说来这种做法是颇为自然的。然而朱世杰《四元玉鉴》中的天元术解法却偏偏只用一个未知数——天元，虽然《四元玉鉴》中用天元、地元两个未知数求解的问题有三十六问之多。由此也可证明非但这些代数证法远不是刘徽原证，甚至还不是天元术出现时应用于《海岛算经》诸题的证法。与之相反，

我们认为正是刘徽的《海岛算经》诸题曾为天元术提供了具体实例并促使其发生发展，其作用可能不在勾股一类问题之下。

十七世纪解析几何与微积分的创立是数学发展史上的大事。解析几何的诞生一般认为主要应归功于笛卡儿 Descartes。但是笛卡儿一无坐标系统，二无正负线段，他的主要功绩，不少数学史家认为是在于代数的几何应用与几何的代数化，在于把几何图形表达成代数形式，因而为研究物理世界（笛卡儿认为可归结为几何学）提供了数量工具。有人并因此提出“代数几何”应是一个比解析几何更合适的名词。以研究笛卡儿著名的 Scott 认为笛卡儿的成就是：把一个几何问题化成代数形式因而得以使用整个代数机器以求解。然而，这种几何与代数的配合、代数的几何应用与几何的代数化正是宋元天元术的主要含义之一。而且就在宋元数学家的手里为了发展天元术而建立了一整套的代数机器，包括天、地、人、物等元的正负乘幂及其代数式，以及这些代数式的运算系统的建立。天元术以勾股重差一类问题作为立术的主要来源，以天、地、人、物等元代替所求线段，用它们的代数式来表示几何图形的长度、面积，然后运用相伴发展了的那套代数机器进行求解。所有这些，正是所谓笛卡儿的最主要的贡献所在，是解析几何得以创立的决定性的一步。当然，笛卡儿在变数的引入以及就在解析几何上的其他种种发明创造对于数学的发展有着划时代的功绩，他对世界数学的伟大贡献是完全肯定的。然而无视于我国天元术在这一方面所起的重要作用，而单纯强调代数方程数值解的成就（这一成就的辉煌是无庸置疑的），把它看成是我国数学的“顶峰”，则实质上无异是贬低了我国对世界数学的伟大贡献。同样，我们认为如果把《海岛算经》的功绩局限于测望之学，而

忽略它对天元术发展的影响与作用，则对它的估价也还是不够的。

## 七、海岛公式证明的复原

我们认为，与其他诸家不同，杨辉对海岛公式的分析以及李俨根据杨辉补出的证明是基本上正确的。

先考虑“句中容横与股中容直二积皆同”这一结论(图 9 )，这是整个重差理论的基础，也就是杨辉所说的“源”。它的来历可能有二。其一是根据相似勾股形的命题：股率乘见勾，等于勾率乘见股。这一命题在《周髀算经》求日径术中即已用到，而见于《九章算术》句股题 15 以下刘徽注的每一题中。另一是出入相补原理。这是我国古代几何学中面积体积理论的结晶。所谓“出入相补，各从其类”这一基本原理，明确叙述于勾股章开首勾股术的刘徽注之中，而被广泛应用于《九章算术》的勾股商功等章。

在图 9 的情形，出入相补原理与相似勾股形命题自然是等价的。这在《九章算术》勾股章的徽注中也可看出。按勾股章共 24 题，自第 1 题至第 13 题，徽注的证明都用出入相补，第 17 题以下都用相似勾股形，此外数题则都两者并用。第 15 题勾中容方问题，更详述两种证法，而勾股章自 17 题以下求邑方与量木高井深诸术，在方法上显然都从勾中容方问题演化而来。两种方法在此是相通的，而出入相补原理是一个更高更普遍的概括，这一普遍原理不仅是我国古代几何学的一个结晶，且其影响及于整个数学的其他不同领域。由于牵涉面较广，非简单篇幅所能尽，我们将留待其他机会再作详细讨论，就本文

当前的问题来说，则不论属于何种情形，杨辉证明海岛公式的“源”应系直接来自对“海岛小图”的观察与对我国古代遗产的具体分析。李俨所谓“辉所取者，盖此义也”，牵扯到欧几里得原本之说，是没有任何根据的。

但是李俨根据杨辉分析补作的证明，则我们认为是大体上正确的，可以认为实质上这就是刘徽的原证。为说明这一点，我们把证明重述如下，并附以赵爽日高图说中的相应语句，作为此证即是原证之说的佐证（图 12）。

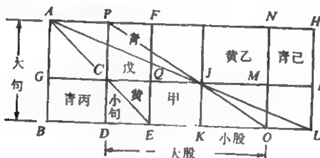



图 12

| 证　　明 | 赵爽日高图说 |
| --- | --- |
| $\square JD=\square JN$ | 黄甲与黄乙其实正等 |
| $\square JB=\square JH$，即 $\square JD+\square CB=\square JN+\square MH$， | 黄甲与青丙相连，黄乙与青己相连，其实亦等。 |
| $\therefore \square CB=\square MH$ | 青丙与青己其实亦等。 |
| $\square JD=CD\times DK$ | 以表高乘两表相去为黄甲之实 |
| $\square CB=\square CF$<br>$\therefore \square MH=\square CF$<br>由此得 $MI=CQ$， | （出入相补原理） |
| $JM=JI-CQ=KL-DE$ | 以影差为黄乙之广， |

$\therefore\quad MN=\dfrac{CD\times DK}{KL-DE}$

$\therefore$ 日高 $AB$

$=\dfrac{CD\times DK}{KL-DE}+BG$

$=\dfrac{\text{表高}\times\text{表间}}{\text{景差}}$

$+$表高

而一，所得则变为黄乙之表。

上与日齐，按图当加表高。

去表远公式的证明如下：

由青丙＝青戊(出入相补原理)，得

去表远 $BD=\dfrac{AG\times\text{前去表}}{\text{表高}}$

前已知 $AG=\dfrac{\text{表高}\times\text{表间}}{\text{景差}}$ 故得 去表远$=\dfrac{\text{前去表}\times\text{表间}}{\text{景差}}$

对于上面补出的原证再作一些补充说明如下：

(1) 从证明步骤看，现存赵爽《日高图说》似既有脱漏又有句文倒置，从现存甄鸾的注与残图（虽然错误极多)看来,现在所补的证与图似尚未能与原文完全相符（例如有甲乙丙与戊己而无丁)。

(2) 证明还可以简单一些，例如 $PO$、$ON$ 线即可略去，$\square JH$ 也不必分成黄乙与青己两部分，写成上面较繁的形式是依据《日高图说》的术文，而朱世杰天元术文又可为之佐证，见下(3)。

(3) 与朱世杰天元术文（见第六节）比较,可看出朱文(图12)中

大勾＝$AB$，小股＝$KO$，大股＝$DO$，小勾＝$CD$。故大勾×小股＝大股×小勾,即 $\square KN=\square DM$ 或相当于黄甲＝黄乙

（都根据出入相补原理），朱世杰的解术无疑是有来历的，在补出原证中添上 $PO$ 与 $ON$ 等线者与此正相符合。

（4）与钱宝琮补出日高图（图 2）比较，可见添作平行线之非理，也可见黄乙与青己的位置应左右对易。（参看下节）

（5）为进一步说明，补出《海岛算经》第二题望松的证明如下（题与术文从略）：

附图 13 中 $AB$ = 松高，$CD$、$FG$ 为前后两表，$CE$ = 入表，$DI$、$GK$ 为前后两表退行，依据望海岛题表去山公式，可知视 $ED$、$HG$ 为望松本 $B$ 点的前后两表，而与 $CD$、$FG$ 为望松顶 $A$ 两表比较时，$LF$、$MH$ 应同交于平地上 $J$ 点，使 $GJ$ = 相多，而 $AF$、$BH$ 应同交于后退表处 $K$ 点，使 $JK$ = 前表却行 $DI$。今据出入相补，有□$FD$ = □$FP$，□$HD$ = □$HQ$。相减得□$EF$ = □$NP$ − □$HR$，或 □$NP$ = □$EF$ + □$HR$，即松高 × 相多 = 表间 × 入表 + 入表 × 相多，也即《海岛算经》的松高公式：

$$松高=\frac{表间\times入表}{相多}+入表$$

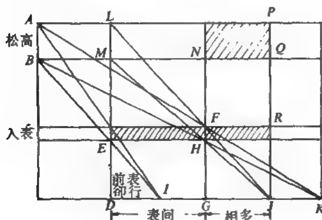



图 13

朱世杰《四元玉鉴》勾股测望门第五题与《海岛算经》望

松题类同，但易松生山上为方城上成柚，朱术立天元一为柚高，又为见勾差即图中 $AB$。相多即 $GJ$ 为股差率，以表间加股差率即 $DJ$ 为见股差，入表即 CE 为勾差率，从见勾差×股差率＝见股差×勾差率也即前面的 $\square NP=\square ER$。得方程解之得柚高。由此解法也可为所补原证中添作诸线的一个旁证。

(6) 今再补出《海岛算经》第四题望谷的证明如下：

图 14 中 $AB$＝深谷，$CD$、$EF$ 为岸上重矩之勾，$CG$、$EH$为测谷深处 $A$ 点所得入股。依出入相补得 $\square HK=\square HB$，$\square GL=\square GB$。相减得 $\square HO=\square HC-\square GM$，或$\square GM=\square HC-\square HO$，由此即得《海岛算经》中的谷深公式：

$$谷深=\frac{矩间\times上股}{下股-上股}-勾高。$$

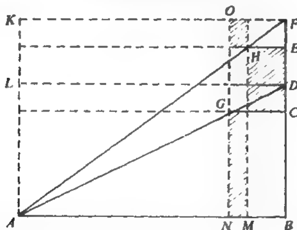



图 14

朱世杰《四元玉鉴》勾股测望门第七题与《海岛算经》望谷题类同，所用天元术草亦与《海岛算经》术文相同，只是用天元术语言表达而已。

(7) 朱世杰《四元玉鉴》勾股测望门第六第八两问即《海岛算经》中望邑与望清渊两题，其天元术草也与《海岛算经》术

文一致。朱书中这几问的方程都是一次的，即所谓开无偶平方。这些都足以说明一方面朱书这一部分渊源于《海岛算经》原著，另方面《海岛算经》为天元术提供了最简单最直接的素材，因而应是天元术产生的早期的推动力。

(8)《海岛算经》其他诸题，都易从海岛公式以及松高谷深等公式推出。这些证明都简单直观，容易为一般人所接受，这正是我国古代几何学的一个特色。且证明直接导致《海 岛 算经》诸问原来给出公式的形式，与之相反，不论如李潢用欧几里得几何或后世诸人如李俨〔乙 2〕用近代的代数，证明 都 颇繁复，尤其要再经历一番曲折与演算，才能凑出《海岛算经》原来的公式形式。这也说明这些证法与刘徽原意毫无共同之处，而上面所提出的证明，才是符合刘徽原意的证明。

(9) 从李潢《重差图序》，知李曾见到海岛旧图，且所谓“两形相去辽远”而须“宛转通之”，正是出入相补的特色，因而可以相信这一旧图即如图 12 那样。至于所谓“皆可不必也”之语，如果把李潢《海岛算经细草图说》与我们补作的图与证明相对照，优劣判然。这正好说明明末以来中国固有的几何学已为欧几里得几何所排挤殆尽，清代学者如李潢几已一无所知，只能屈从于欧几里得的一统天下而已。

丢开对天元术所起的推动作用不谈，只从测望这一角度来说，《海岛算经》立意造术之深，也非西方如海伦等所能企及。而且，《海岛算经》似已发展成一个完整的系统理论。依 据 刘徽《九章算术注》原序中所说：“度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望，触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入，博物君子，详而览焉”。似乎刘徽已总 结 出一般的规律，不论地形如何“幽遐诡伏”，都可以设计出何处设表，作出

测量的具体方案来。刘徽原意虽然已不得而知，但这对于现代的数学工作者来说，仍是一个值得思考与解决的问题。而且，重差理论中以量长代替角的测量这一方法所隐含的以多次简易测量代替较难测量的原理在现代的各种技术问题上可能还是有现实意义的。

## 八、利玛窦来华时期的测望理论及其影响

综观我国测望理论的历史演变过程，明代以至利玛窦、徐光启时期可以说是一个转折点。在第六节中已经指出，我国古代测望理论从《周髀算经》时起，以迄宋元之世不仅一直在发展，而且在推动天元术的发展因而对近代代数学与解析几何的影响是无可估量的。到了明朝八股取士，理学统治了学术界的思想，数学已趋衰微，但《海岛算经》仍有传者。到利玛窦于1582年来华，1600年进入明室宫廷，士大夫如徐光启、李之藻争相结纳，推崇西学而对于自己多所诋毁，更使我国古代传统数学一蹶不振，《海岛算经》理论也竟成绝学。

公元1607年（明神宗万历35年）利玛窦与徐光启共译《几何原本》，引入了古希腊的欧几里得几何学。1607至1608年间，又由利玛窦口译，徐光启笔受《测量法义》一书，把西方的测量技术传入了我国。分析一下《测量法义》一书的内容与方法，对于了解它的意义是必要的。

《测量法义》书首“最目”云：

“先造器，次论景，本题15首，附三数算法”。

“造器”明确测量目的与所用仪器：“测量者，以测望知山岳柚台之高、井谷之深、土田道里之远近也。其法先造一测望

之器，名曰矩度…”，

“论景”指出测量方法：

“法中俱用直景倒景布算，故先正解二景之义，次解其转合于矩度，以资后论…”。

其次是“本题 15 首”，列举各种具体问题的测量方法。最后的附录“三数算法”系比例算法，则即《九章算术》中的今有术。

《测量法义》中所用仪器以矩度为主，15 题中，除第 9 题用平镜，第 10，11，14 用表，第 12 题用矩尺外，其余，都用矩度。矩度、矩尺与平镜特别是矩度是当时欧洲所用主要的测量仪器。矩度与矩尺系 16 世纪中意大利 Tartaglia（因解三次方程而为后世所知）为炮兵发射炮弹而设计〔*B*〕，其中附图与《测量法义》中矩度图完全相同。至于表则为我国自古所用的传统测量仪器，而不见于西方。例如在《测量法义》之后耶稣会教士罗雅谷、汤若望所著《测量全义》一书仪器图说部分曾列举西方古今所用各种测量仪器，即无表的名目。Smith 一书〔*A*13〕几何工具一章论之甚详，也无表的使用，只说古曾有之而已。

Gunther 一书〔*A*5〕有一章专论古代测望仪器，也只说古代有表，现已不用。大抵以表测量是古代许多民族所共同有过的实践活动，但只有我国才发展到重差术这样的理论高度。这正显示出我国在数学上独特的创造力，为世界其他任何民族所不能企及的。

就测量方法而论，则《测量法义》15 题中，除第 10 题以表测高用表两测，第 15 题用表四测，以及第 6 题以目测高的后面部分用矩度两测外，其余都用 1 测。其中两测以上诸题都

是我国古代的经典成果，在第二节末早已指出，重测正是重差理论的指导思想，徐光启继《测量法义》之后作《测量异同》，序言中称：

“九章算法，勾股篇中故有用表用矩尺测量数条〔作者注：这里的矩尺与利玛窦书中的矩尺完全不同〕，与今译《测量法义》相较，其法略同…。既具新论，以考旧义…今悉存诸法，对题胪列，惟求同异…共为测量异同六首…”。

在徐列举异同六首之中，第5首以四表测远，与《测量法义》第14题以四表测远类同，徐也指出“此旧法与今译同”。实则此题即《九章算术》勾股章的第22题立四表求木去人。又《测量法义》中的第10题以表测高，则与《测量异同》中第4首以重表兼测无远之高无高之远与第6首以重矩兼测无广之深无深之广类同，实则与《海岛》第一题无异，只是《测量法义》与《测量异同》中的证明方法都依据欧几里得《几何原本》而已(见第三节)，《测量法义》第4题的后面部分则无非将原来用表两测者改为用矩度两测而已。

徐光启在《测量异同》序言中只提到九章算法勾股篇，但异同六首既都是“旧义”而“悉存诸法”或“旧篇所有”，则第4第6两首必有所本。可见徐至少应见到《海岛算经》的第一题，鉴于《海岛算经》明时已收罗于《永乐大典》，今本《海岛算经》即从其中抽出，徐似不应该不见到该书。然而徐在《题测量法义》中却说：

“刘徽、沈存中（括）之流，皆尝言测望矣，能说一表，不能说重表也”。

这是难以自圆其说的。徐光启指摘明代“算数之学特废”的原

因是“名理之儒土苴天下之实事”与“妖妄之术谬言数有神理”，又提出对历法应“详加测验”，“不差不改，不验不用”，徐又撰《农政全书》，这是我国古代的一部农业百科全书，这些见解与工作都应肯定，但不能因此而为徐对西算的投降主义态度辩解。

至于利玛窦，则史载于1582年（明万历10年）到广东中山，1589年到南京时与徐光启相识，1606年以来与徐共译《几何原本》与译授《测量法义》时，来我国已二十余年。在这样长的时期内说利不接触到中国古代的固有数学，将是不可思议的。西方的测量技术本极落后，文艺复兴以前，西方关于测高望远之学主要见于海伦的《On the dioptra》一书。按海伦的年代从公元前150年至公元后250年估计大有出入，甚至有人与十世纪时拜占庭的某一海伦相混，所著书最早在1814年用意大利文编集刊行，其中内容已知有他人掺入痕迹。所用测望仪器Dioptra大致是一种拟想中物，实际上可能并不存在。即使丢开这些不谈，海伦一书的内容据柯恩（Cohen）及笛卡儿（Descartes）所著书〔A 3，6〕所引也不能与《海岛算经》之有指导思想并成为系统理论者相提并论。到16世纪时Tartaglia制作矩度，成为欧洲测望的主要仪器。但器颇笨重，使用并不灵便，在耿受（Gunther）及斯密恩(Smith)所著书〔A 5，13〕中有不少图片可见其测法之一斑。《测量法义》主要部分正反映了当时欧洲的这一水平。而其中较先进的诸题恰与《九章算术》勾股以及《海岛算经》相重，所用表测更与通行西器及其测量方式有别，这说明它们应另有来历。特别是在利玛窦以表测高两测部分的证明中（见前第三节以及图6），须在丑庚线上取卯点使　己卯＝丑寅。按这样的取法正与我国古代海岛

公式原证中黄乙在青己左方的位置相当（图 12)。如果依欧几里得体系的证法则应添作平行线如图 7，这样则所取卯点应使辛卯 = 丑寅，或相当于钱宝琮日高图（图 2）中黄乙在青已右方位置的情形。但利玛窦不此之图（对他说来这应是很自然的)，却毫无理由不伦不类地选取了使己卯 = 丑寅的卯点，这正说明利的这一问题与证法有它不同于西方欧几里得体系的来源，为了要纳入欧几里得体系，因而硬凑答数留下了斧凿痕迹。至于利玛窦证明之兼形式主义繁琐哲学与娇揉做作三者而有之，则犹其余事也。

在同一时期，由利玛窦授李之藻演的《同文算指》(1614年）中卷之四叠借互征法为利玛窦所据以翻译的 Clavius 即所谓丁先生原著所无，而显然取意于《九章算术》方程章或我国以后算书中的相类篇章。这是我国古代数学的辉煌成就之一，与《同文算指》其他部份相较，水平高下极为显著。然而，李之藻在序中虽自谓“间取九章补缀”，但都成为“利玛窦授”的材料，书首仅题“李之藻演”而已。同样，后来的《测量全书》中也提到阳马、鳖臑、堑堵等《九章算术》中的专有名词而不及《九章算术》。说这些我国古代的文化遗产，不因利玛窦等传教士们的“传授”而流入西方，也将是不可思议的事。本人见闻有限，只能略举数例。在这一西方科学技术开始大规模输入期间，东西方交流中双方的得失如何以及存在的许多问题值得来一番细致调查把它彻底弄清。

自利、徐输入西算以来，终清代两百余年我国对数学的发展已丧失推动作用，自此以来，人人知有欧几里得，而对我国实则更为辉煌的古代几何学却缺少认识。清代中叶虽对我国传统数学重新发掘并有所重视，但如李潢等局限于以欧几里得几

何等西算铨释我国古算之类，系统既然不同，自然格格不入，至于所谓创造性的工作，则远落人后，在清一代，一些最有成就者如梅文鼎等，志趣不可谓不高，用力不可谓不勤，也正如钱宝琮在《中国数学史》中所说："从其具体的数学成果讲来，大都较西欧数学的同样成果迟了一百余年"。这与宋元以前我国数学比之西方在许多方面遥遥领先者正可对照。

就测量技术而言，沈康身同志在"我国古代测量技术的成就"〔丙2〕一文中曾有很好的介绍。我们将借用沈文的结语（也适用于测望理论）照录如下，以作本文的结束：

> "明末外国传教士随着宗教把某些科学技术进入中国。当时士大夫阶层，一方面脱离劳动人民，一方面又不认真研习数学。于是崇外之风从此孳生。当时象徐光启这样传播西学的代表人物，在序西海利玛窦授李之藻演的《同文算指》（1614年）里就说："观利公与同事诸先生所言历法诸事，即其数学精妙，比之于汉唐之世十百倍之……振之（李之藻）两度居燕，译得其算术若干卷。既脱稿，余始问请共读之，共讲之。大率与旧术同者，旧所弗及也；与旧术异者，则旧所未之有也。旧术与西术合者，靡弗与理合也；与西术谬者，靡弗与理谬也"。他最后的结论是，"虽失十经，如弃敝屣矣"。措辞推重外国，对我国固有创造发明反多诋毁，数典忘祖，这是极不应该的"。

## 参 考 文 献


甲

〔1〕《算经十书》，钱宝琮校点，中华书局，1963。

〔2〕《周髀算经》。

〔3〕魏刘徽：《注九章算术》。

〔4〕魏刘徽：《海岛算经》。

〔5〕宋秦九韶：《数书九章》，1247。

〔6〕$_1$宋杨辉：《续古摘奇算法》，1275。

〔6〕$_2$宋杨辉：《田亩比类乘除捷法》，1275。

〔7〕$_1$元朱世杰：《四元玉鉴》，1303。

〔7〕$_2$元朱世杰：《算学启蒙》，1299。

〔8〕明吴敬：《九章算法比类大全》，1450。

〔9〕明周述学：《神道大编历学算会》，1558。

〔10〕明程大位：《算法统宗》，1592。

〔11〕利玛窦口译，徐光启笔受：《测量法义》，1607—8。

〔12〕明徐光启：《测量异同》。

〔13〕利玛窦授，李之藻演：《同文算指》，1614。

〔14〕罗雅谷、汤若望撰订：《测量全书》。

〔15〕清李潢：《海岛算经细草图说》，1820。

〔16〕清宋景昌：《数书九章札记》，1842。

乙

〔1〕李俨：《中国数学大纲》，科学出版社，1958。

〔2〕李俨：《中国古代数学史料》第26章海岛算经新注，中国科学图书公司，1954。

〔3〕李俨：《中国算学史》，商务，1936。

〔4〕李俨、杜石然：《中国古代数学简史》，中华，1963—4。

〔5〕钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1964。

〔6〕钱宝琮：《中国数学史话》，中国青年出版社，1957。

〔7〕许莼舫：《三角术的嚆矢》，见《中算家的几何学研究》，第2章，1952。

丙

〔1〕李俨：《重差术源流及其新注》，见《学艺》7卷8期，1926，1—15.

[2] 沈康身：《我国古代测量技术的成就》，科学史集 刊 8，1965，28—41。

[3] 张家泰：《登封观星台和元初天文观察的成就》，见《考古》，1976 第 2 期，95～102。

[4] 钱宝琮：《中国古代数学的伟大成就》，见《科学通报》 2 卷 10 期，1951，1041—1043。

[5] 钱宝琮：《秦九韶〈数书九章〉研究》，见《宋元数学史论文集》，科学出版社（1966）60—103。

[6] 梅荣照：《李冶及其数学著作》，同上，149—165。

[7] 严敦杰：《宋杨辉算书考》，同上，149—165。

[8] 杜石然：《朱世杰研究》，同上，166—209。

[9] 白尚恕：《秦九韶测望九问造术之探讨》，同上，附录 4，290—303。

[10] 白尚恕：《刘徽海岛算经造术之探讨》。

A.

[1] Ch. Boyer, History of analytic Geometry, 1956.

[2] F. Cajori, A history of mathematics, 2nd ed, 1919.

[3] M. R. Cohen -I, E. Drabkon, A source book in Greek science. 1948.

[4] R. Descartes, La géométrie, Paris, 1927,

[5] R. Gunther, Early science in Oxford, v. l., Pt, III-IV, Physics and Surveying, 1942.

[6] T. Heath, A history of Greek mathematics, 2v., 1912.

[7] M, Kline, Mathematical thought from ancient to modern time, 1972.

[8] V. Libbrecht, Chinese mathematics in the 13th century, 1973

[9] Y. Mikami, The development of mathematics in China and Japan, 1913.

[10] J. Needham, Science and civilization in China, v. 3. 1959.

[11] J. F. Scott, A history of mathematics, 1958.

[12] J. F. Scott, The scientific work of Rone Descarteé, 1952.

[13] D. E. Smith, History of mathematics, v1, 1923; v2, 1925.

[14] D. J. Struik, A concise history of mathematics, 1948。(关娴译，数学简史 1956)

B.

[1] Drake, Galileo and first mechanical computing device, Scientific American, 1976 April, 104—113.

# 《海岛算经》古证探源

刘徽《海岛算经》是一部关于测高望远之术的专著。按刘徽自序，有“析理以辞，解体用图”，以及“辄造重差，并为注解”等语，说明原著应有注有图。传至后世，所载九题只有方法结果而无注析附图，杨辉在《算法通变本末》卷上中曾说，“海岛算法，隐奥莫得其秘”，清代李潢、沈钦裴等都曾尝试补出证明，但与刘徽原意显无共同之处。我们认为，要使古证复原，应该遵循以下三项原则，是否妥当，还请有志者共同商讨。

原则之一，证明应符合当时本地区数学发展的实际情况，而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法。

原则之二，证明应有史实史料上的依据，不能凭空臆造。

原则之三，证明应自然地导致所求证的结果或公式，而不应为了达到预知结果以致出现不合情理的人为雕琢痕迹。

《海岛算经》的第一题海岛公式从明清以迄近代出现过不少证明，是否合于古证原意，可以依据这些原则逐一考核，中外经典著作，流传至今，历代难免有后人随意篡改增添，甚至伪造伪托，以至真假不辨，也可以依据这些原则作为鉴别真伪的一种手段。

本文将依据这些原则，尝试将《海岛算经》九题的古证补出于下。中国古代的几何学有其自己的发展过程与方法体系，与希腊欧几里得几何迥乎不同。在我国古代几何中，并未见到明显的平行线概念，角度也很少用，虽有比例理论，但文献所

载局限于勾股相似形的简单比例关系，而几乎未见到有关一般相似形以及各种比例式的变形转化等记载，在古证复原中，这些概念都应避免使用，象李潢[ 9 ]那样滥添平行线的作法，更难允许。

相反，出入相补，各从其类的原理，明显见诸九章刘徽注以及赵爽著作，在《九章算术》的商功句股诸章曾多方面应用，由此原理可得以下推论：

**推论之一** 如图1从□$AB$与对角线$AB$上一点$C$可得□$CD$=□$CE$（=指面积相等）。

**推论之二** 如图2，在句股相似形$ADF$、$ABC$与$BDE$中，称$AC$=见股，$BC$=见句，$BE$=股率，$DE$=句率，$AF$=大股，$DF$=大句(或大股之句)则有

$$\frac{\text{大股}}{\text{大句}}=\frac{\text{见股}}{\text{见句}}=\frac{\text{股率}}{\text{句率}}。$$

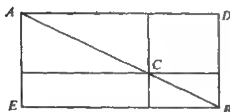


图1

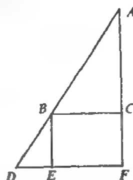


图2

这两推论显然是等价的，都曾多次应用于各种勾股问题，详见刘徽《九章注》以及赵爽《日高图说》与《句股圆方图说》。

本文关于《海岛》九题的复原古证，无非是这两推论的反复运用。九题中海岛第一题中的岛高公式，望松第二题的松高辅

助公式(见下)，以及望谷第四题的谷深公式，代表了古代用矩立表以望高、知远、测深的三个基本结果，其余诸题的公式皆可从这三个基本公式容易得出。在这三个基本公式特别是岛高公式的证明中，我们都只用了推论之一的矩形等积关系而避免应用推论之二的勾股相似形比例关系。其理由可概述如下：

1．这一证明及其附图(图3)，有赵爽的《日高图说》以及流传至今的日高残图作为依据。所谓“上与日齐”，即说明原图应补成若干长方形。从《日高图说》，可以推想古日高图(图3)与古证应较本文所示稍复杂一些，详见[14]。

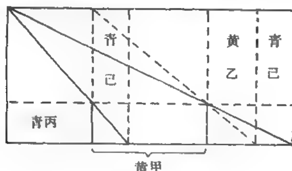



图3

2．杨辉在《续古摘奇算法》中自言“辉尝置海岛小图于座右，乃见先贤作法之万一”。可知杨辉是依据当时仍在流传的古海岛图来论证的。本文所附海岛图(图4)，相当于杨辉的隔水量竿的附图，证明也实质上即杨辉的证明或古时的海岛原证。

3．李潢在《重差图序》中说“望海岛旧有图解”，又说“旧图于形外别作同积二方”。这说明李潢时还能见到海岛古图(依李序即古重差图)，而从“同积二方”一语看来，这古图中是有许多长方形从形外别作而来的。

4. 证明中我们避免应用推论之二，因为从比例关系还须经过某些运算变化才能得出最后公式，而这种运算变化在我国古代文献中颇少依据，三上义夫在所著论《海岛算经》的一章中（见[18]，页33～36），曾经依据比例及其算法认为我国天元术代数学的产生，可从13世纪提前一千年至刘徽时期，这种过誉溢美之辞，我们认为是不应接受的。

5. 我们的证明只需极简单的论证，从最基本的一些关系自然地直接获得刘徽原著所列举的那些形式上颇为复杂的公式。这足为这些证明基本上符合刘徽原意的一个旁证。与之相反，在利玛窦口译，徐光启笔受的《测量法义》中，以表测高的第10题实质上与海岛题相同，其证明颇有事先已知海岛公式而强欲用《几何原本》生搬硬套来获证，因而不无穿凿调琢之嫌。由于《测量法义》一书不易见到，故将利玛窦的原图原证作为本文附录原样照录，以供大家参考。

以下将就《海岛算经》九题逐一证明。为了便利读者，原题以及术曰将依古原著照录，而在括号中注明附图相应的点或线段，诸公式即是原来术文的直接转述。

【一】望海岛

今有望海岛($AB$)，立两表（$DE$、$FG$）齐高三丈，前后相去（$EG$）千步，令后表与前表参相直。从前表($DE$)却行($EH$)一百二十三步，人目著地($H$)取望岛峰($A$)，与表末($D$)参合。从后表($FG$)却行($GI$)一百二十七步，人目著地($I$)取望岛峰($A$)，亦与表末($F$)参合。问岛高($AB$)及去表($BE$)各几何？

术曰：

以表高乘表间($EG$)为实，相多($GI-EH$)为法，除之。所

得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之，得岛去表里数。

望海岛公式：

$$岛高=\frac{表间\times表高}{相多}+表高,$$

$$(前)表去岛=\frac{表间\times前表却行}{相多}。$$

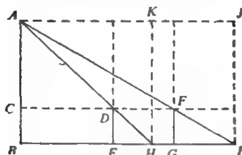



图 4

证　如图 4，从□$AI$ 与 $F$ 得

$$\square FJ=\square FB,$$

又从 □$AH$ 与 $D$ 得

$$\square DK=\square DB。$$

相减得　　　　$\square FJ-\square DK=\square EF$。

或：

$$后表却行\times(岛高-表高)-前表却行\times(岛高-表高)$$
$$=表间\times表高,$$

由此即得岛高公式。

又从 □$DB$＝□$DK$ 得

$$前表去岛\times表高=前表却行\times(岛高-表高)。$$

应用岛高公式即得表去岛公式。

**【二】望松**

今有望松（$AB$）生山（$BC$）上，不知高下。立两表($DE$、$FG$)，齐高二丈，前后相去（$EG$）五十步，令后表（$FG$)与前表（$DE$）参相直。从前表却行（$EH$）七步四尺，薄地($H$)遥望松末($A$)，与表端（$D$）参合。又望松本($B$)，入表($DJ$）二尺八寸。复从后表却行（$GI$）八步五尺，薄地遥望松末($A$)，亦与表端($F$)参合。问松高($AB$)及山去表($CE$)各几何？

**术曰：**

以入表乘表间（$EG$）为实，相多（$GI-EH$）为法，除之。加入表，即得松高。求表去山远近（$CE$）者，置表间，以前表却行乘之为实，相多为法，除之，得山去表。

**望松公式：**

$$松高=\frac{表间\times入表}{相多}+入表,$$

$$表去山=\frac{表间\times前表却行}{相多}。$$

**证** 先将松高图(图5）与海岛图相比较，视 $AC$ 为海岛，则表去岛即此处之表去山 $CE$，故由海岛公式得

$$表去山=\frac{表间\times前表却行}{相多}。$$

其次将前表两测从松高图中割裂而作松高辅助图（图 6），则从 $\square AH$ 与 $D$ 得

$$\square DK=\square DC。$$

又从$\square BH$ 与 $J$ 得

$$\square JL=\square JC。$$

两式相减得

$$\square MK - \square JN = \square JO$$

或即

前表却行×松高－前表却行×入表＝表去山×入表。

图 5

图 6

由此得

$$松高=\frac{表去山\times入表}{前表却行}+入表。$$

这一公式在以后经常用到将称之为松高辅助公式。以表去山公式代入这一辅助公式，即得所求松高公式。

【三】望邑

今有南望方邑(*ABCD*)，不知大小。立两表(*E*，*F*)东西相去(*EF*)六丈，齐人目，以索连之。令东表(*F*)与邑东南隅(*C*)及东北隅(*B*)参相直。当东表之北却行(*FG*)五步，遥望邑西北隅(*A*)，入索东端(*IF*)二丈二尺六寸半。又却北行去表(*FH*)十三步二尺，遥望邑西北隅(*A*)适与西表(*E*)相参合。问邑方

(AB)及邑去表(BF)各几何?

术曰:

以入索乘后去表，以两表相去除之，所得为景差。以前去表减之不尽，以为法。置后去表，以前去表减之，余以乘入索为实，实如法而一，得邑方。

求去表远近者，置后去表，以景差减之，余以乘前去表为实。实如法而一，得邑去表。

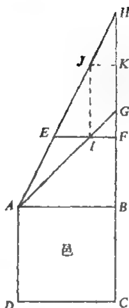


图7

望邑公式:

$$景差=\frac{入索\times后去表}{表相去},$$

$$邑方=\frac{入索\times(后去表-前去表)}{景差-前去表},$$

$$邑去表=\frac{前去表\times(后去表-景差)}{景差-前去表}。$$

**证** 添作 $IJ$ 与 $JK$ 如图7(望邑图)。从句股相似形 $JKH$ 与 $HEF$ 得

$$HK=\frac{JK\times FH}{EF}=\frac{IF\times FH}{EF}$$

$$=\frac{入索\times后去表}{表相去}。$$

称 $HK$ 为景差，即得所求景差公式。

今将图7与望海岛图比较，视 $AB$ 为海岛，$IF$，$JK$ 为前后两表，则两图间的关系对照如下表所示:

| | 望　　邑 | 望　海　岛 |
|---|---|---|
| AB | 邑方 | 岛高 |
| IF | 入索 | 表高 |
| FK = FH − KH | 后去表 − 景差 | 表间 |
| BF | 邑去表 | （前）表去岛 |
| FG | 前去表 | 前表却行 |
| KH | 景差 | 后表却行 |
| KH − FG | 景差 − 前去表 | 相多 |
| GH = FH − FG<br>= FK + (KH − FG) | 后去表 − 前去表 | 表间 + 相多 |

依据这一对照表，岛高与表去岛公式，即各变为邑方与邑去表公式。

【四】望谷：

今有望深谷($EFG$)，偃矩($BAC$)岸上，令句($BA$)高六尺。从句端($B$)望谷底($G$)入下股($AD$)九尺一寸。又设重矩($B'A'C'$)于上，其矩间($AA'$)相去三丈。更从句端($B'$)望谷底($G$)，入上股($A'D'$)八尺五寸。问谷深($AE$)几何？

术曰：

置矩间，以上股乘之，为实。上、下股相减，余为法，除之。所得以句高减之，即得谷深。

望谷公式：

$$谷深=\frac{矩间\times 上股}{下股-上股}-句高。$$

证　如图 8（望谷图），从$\square B'G$ 与 $D'$ 得：

$$\square D'H' = \square D'E。$$

从□BG 与 D 得：

□DH = □DE。

相减得　□D′I = □D′A − □DF。

因　□D′I = □A′I − □B′D′

= □BD − □B′D′

= 句高 ×（下股 − 上股），

□D′A = 矩间 × 上股，

□DF = □DE − □AF

= 谷深 ×（下股 − 上股），

故得　谷深 ×（下股 − 上股）= 矩间 × 上股 − 句高 ×（下股 − 上股）。由此得望谷公式。

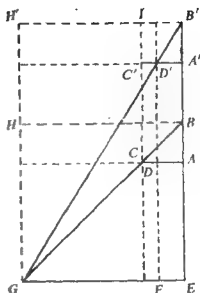



图 8

**【五】望楼**

今有登山（AI）望楼（HG），楼在平地。偃矩（BAC）山上，令句（BA）高六尺，从句端（B）斜望楼足（G），入下股（AD）一丈二尺。又设重矩（B′A′C′）于上，令其间相去（A′A）三丈。更从句端（B′）斜望楼足（G），入上股（A′D′）一丈一尺四寸。又立小表（E′D′）于入股之会（D′），复从句端（B′）斜望楼岑端（H），入小表（F′D′）八寸。问楼高（HG）几何？

**术曰**：上下股相减，余为法。置矩间，以下股乘之，如句高而一。所得，以入小表乘之，为实。实如法而一，即是楼高。

**望楼公式**：

$$楼高 = \frac{矩间 \times 下股}{句高} \times 入小表/(下股 - 上股)。$$

**证** 如图9（望楼图）。视 $GH$ 为山 $HK$ 上之松，$D'J$ 为前表，却行至 $B'$ 以望松。则从望松辅助公式得

$$楼高=\frac{(山去楼-上股)\times入小表}{上股}+入小表=\frac{山去楼\times入小表}{上股}。$$

从句股相似形 $B'GI$ 与 $B'D'A'$ 得

山去楼/上股＝（山高＋矩间＋句高）/句高。

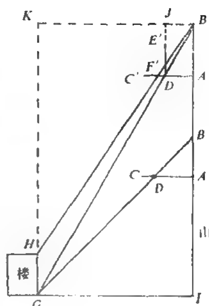



图 9

视 $GI$ 为深谷，则从望谷公式得

山高＋句高＝矩间×上股/（下股－上股）。

由此诸式即得望楼公式。

## 【六】望波口

今有东南望波口($AB$)。立两表南($D$)、北($C$)相去($CD$)九丈，以索薄地连之。当北表之西却行去表($CE$)六丈，薄地遥望波口南岸($B$)，入索北端($CH$)四丈二寸。以望北岸($A$)，入前所望表里($GH$)一丈二尺。又却后行去表($CF$)十三丈五尺，薄地遥望波口南岸($B$)，与南表($D$)参合。问波口广($AB$)几何？

**术曰：**

以后去表乘入索，如表相去而一。所得，以前去表减之，

余以为法。复以前去表减后去表，余以乘入所望表里为实。实如法而一，得波口广。

**望波口公式：**

$$波口广=\frac{入所望表里\times(后去表-前去表)}{\dfrac{入索\times后去表}{表相去}-前去表}$$

**证** 补作 $JK$ 等线如图10（望波口图），今与望松题2相比较，令图中 $AB=$ 松，$AI=$ 山，$CH=$ 前表，$JK=$ 后表，则 $HK=$ 表间，$FJ-CE=$ 相多。在望松与望波口之间有下表中的关系。



图10

今依望松公式有

$$松高=\frac{入表\times表间}{相多}+入表$$

$$=\frac{入表\times(表间+相多)}{相多}$$

或即

$$波口广=\frac{入所望表里\times(后去表-前去表)}{相多}。$$

从句股相似形 $FJK$ 与 $FCD$ 有

$$FJ=\frac{JK\times CF}{CD}$$

或即

$$相多+前去表=\frac{入索\times后去表}{表相去}。$$

| | 望　波　口 | 望　松 |
|---|---|---|
| AB | 波口 | 松 |
| CH = JK | 入索 | 表高 |
| GH | 入所望表里 | 入表 |
| EF | 后去表 - 前去表 | 表间 + 相多 |

以所得相多代入前波口广公式，即得所需公式。

**【七】望清渊**

今有望清渊，渊下有白石($G$)。偃矩($BAC$)岸($AH$)上，令句($BA$)高三尺，斜望水岸($F$)，入下股($AE$)四尺五寸。望白石，入下股($AD$)二尺四寸。又设重矩($B'A'C'$)于上，其间($AA'$)相去四尺。更从句端($B'$)斜望水岸($F$)，入上股($A'E'$)四尺。以望白石($G$)，入上股($A'D'$)二尺二寸。问水深几何？

**术曰：**

置望水上、下股，相减，余以乘石上股为上率。又以望石上、下股相减，余以乘望水上股为下率。两率相减，余以乘矩间为实。以二差相乘为法。实如法而一，得水深。

**望渊公式：**

$$水深=\frac{矩间\times(上率-下率)}{(望水下股-望水上股)\times(望石下股-望石上股)}。$$

其中　　上率 = 望石上股 × (望水下股 − 望水上股)，

　　　　下率 = 望水上股 × (望石下股 − 望石上股)。

**证**　如图 11 (望渊图)，$FH$ 为水面，$AH$ 为岸高，$AI$ 为石深，$FG$ 为水深。今视 $GI$ 为深谷，$G$为谷底，则$AI$为谷深，故依望谷公式有

$$\text{石深} = \frac{\text{矩间} \times \text{望石上股}}{\text{望石下股} - \text{望石上股}} - \text{句高}。$$

又视 $FH$ 为深谷，$F$ 为谷底。则 $AH$ 为谷深，故依望谷公式有

$$\text{岸高} = \frac{\text{矩间} \times \text{望水上股}}{\text{望水下股} - \text{望水上股}} - \text{句高}。$$

因

$$\text{水深} = \text{石深} - \text{岸高}。$$

故将上两式相减，即得所求望渊公式。



图 11

【八】望津

今有登山望津($FG$)，津在山南。偃矩($BAC$)山上，令句高($BA$)一丈二尺。从句端($B$)斜望津南岸($F$)，入下股($AD$)二丈三尺一寸。又望津北岸($G$)，入前望股里($DE$)一丈八寸。更登高岩，北却行($AH$)二十二步，上登($A'H$)五十一步。偃矩($B'A'C'$)山上，更从句端($B'$)斜望津南岸($F$)，入上股($A'D'$)二丈二尺。问津广($FG$)几何？

术曰：

以句高乘下股，如上股而一，所得以句高减之，余为法。置北行以句高乘之，如上股而一，所得以减上登。余以乘入股里为实。实如法而一，即得津广。

望津公式：

$$津广=\frac{入股里\times\left(上登-\dfrac{北行\times句高}{上股}\right)}{\dfrac{下股\times句高}{上股}-句高}。$$

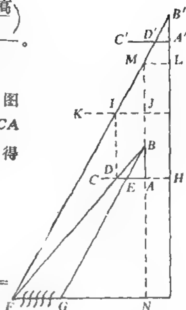


图 12

**证** 将图 12（望津图）与望松图相比较，视 $FG$ 为松生山 $GN$ 上，$CA$ 与 $KJ$ 为前后两表。由松高公式，得

$$松高=\frac{入表\times表间}{相多}+入表$$

$$=\frac{入表\times(相多+表间)}{相多}。$$

式中松高 $=FG$ 即津广，入表 $=DE$ 即入股里，表间 $=AJ$。

又

$$相多=MJ-AB=MJ-句高。$$

$$相多+表间=MJ+AJ-句高=LH-句高$$

$$=A'H-B'L=上登-B'L。$$

故上式变为：

$$津广=\frac{入股里\times(上登-B'L)}{MJ-句高}。$$

今从句股相似形 $B'LM$ 与 $B'A'D'$ 得

$$B'L=\frac{ML\times B'A'}{D'A'}=\frac{AH\times B'A'}{D'A'}=\frac{北行\times句高}{上股}。$$

又从句股相似形 $MJI$ 与 $B'A'D'$ 得

$$MJ=\frac{IJ\times B'A'}{A'D'}=\frac{AD\times B'A'}{A'D'}=\frac{下股\times句高}{上股}。$$

以之代入上津广公式，即得所求望津公式。

【九】临邑

今有登山($AL$)临邑($HI$ $JK$)，邑在山南。偃勾($BAC$)山上，令句高($BA$)三尺五寸。令句端($B$)与邑东南隅($J$)及东北隅($K$)参相直。从句端($B$)遥望东北隅($K$)，入下股($AE$)一丈二尺。又施横句($EF$)于入股之会($E$)，从立句端($B$)望西北隅($H$)，入横句($EG$)五尺。望东南隅($J$)，入下股($AD$)一丈八尺。又设重矩($B'A'C'$)于上，令矩间($A'A$)相去四丈。更从立句端($B'$)望东南隅($J$)，入上股($A'D'$)一丈七尺五寸。问邑广($HK$)、长($JK$)各几何？

术曰：

以句高乘东南隅入下股如上股而一。所得，减句高，余为法。以东北隅下股减东南隅下股，余以乘矩间为实。实如法而一，得邑南北长也。求邑广，以入横句乘矩间为实。实如法而一，即得邑东西广。

临邑公式：

$$\text{邑南北长}=\frac{\text{矩间}\times(\text{东南下股}-\text{东北下股})}{\dfrac{\text{东南下股}\times\text{句高}}{\text{上股}}-\text{句高}},$$

$$\text{邑东西广}=\frac{\text{矩间}\times\text{入横句}}{\dfrac{\text{东南下股}\times\text{句高}}{\text{上股}}-\text{句高}}。$$

**证** 先将图13（临邑图）与望松图相比较，视邑南北长 $JK$ 为松生于山 $KL$ 上，又视 $DA$ 为表，从 $B$ 点遥望，则

入表 $=DE=AD-AE=$ 东南下股 $-$ 东北下股

表去山 $=AL$,

前表却行 $=AB=$ 句高。

依松高辅助公式有

$$松高=\frac{表去山\times入表}{前表却行}+入表=\frac{(表去山+前表却行)\times入表}{前表却行}$$

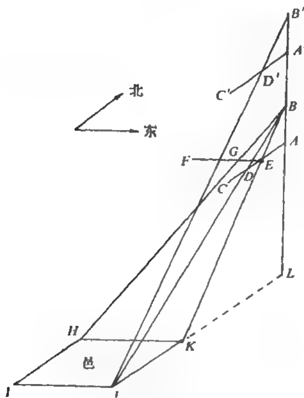


图 13

或

$$邑南北长=\frac{BL\times(东南下股-东北下股)}{句高}。$$

次将图 13 与望谷图相比较，视 $JL$ 为谷，$AL$ 为岸。则谷深 $=AL$，句高 $=AB$。故依望谷公式有

$$BL=谷深+句高=\frac{矩间\times上股}{东南下股-上股}。$$

以此代入前式，即得所求邑长公式。

其次在句股相似形 $BHK$ 与 $BGE$ 中，$HK$ = 邑东西广，$GE$ = 入横句，故有

$$邑东西广=\frac{BK\times 入横句}{BE}。$$

又由句股相似形 $BKL$ 与 $BEA$ 得

$$\frac{BK}{BE}=\frac{BL}{BA}=\frac{BL}{句高},$$

故得

$$邑东西广=\frac{BL\times 入横句}{句高}。$$

将 $BL$ 依前式代入，即得所求邑广公式。

## 附　　录

利玛窦口译徐光启笔授的《测量法义》第10题以表测高以及徐光启《测量异同》第四题以重表兼测无远之高无高之远，实质上即《海岛算经》的望海岛第一题，只是添上了人高而已，图14甲乙为欲测之高，癸壬、丁丙为表，丑子、己戊为人，利玛窦原证照录如下

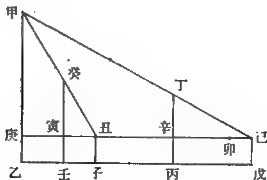


图 14

论曰，两测较卯辛与表目较辛丁或癸寅，其比例若距较戊子或己丑与庚甲。何者。己辛与辛丁既若己庚与庚甲[五卷四]，更之，即己辛与己庚若辛丁与庚甲也[五卷十一]，依显丑寅与丑庚若寅癸与庚甲也，则丑寅与丑庚亦若辛丁与庚甲也，[辛丁与寅癸等故]，而己辛全线与己庚全线若己辛所截取之己卯，[己卯 与 丑寅等故]，与己庚所截取之丑庚也，则己辛全与己庚全亦若己辛分余之卯辛与己庚分余之己丑也[五卷十九]，前已论己辛与己庚若辛丁与庚甲即卯辛与己丑亦若辛丁与庚甲也。更之，即两测较卯辛与表目较辛丁若距较等子戊之己丑与甲庚也。若却后而得壬子，则反上论之。

## 后　　记

本文写成后重读李继闵同志的《从句股比率论到 重 差术》，李文提出对重差一词的解释以及我国古代测望理论“出入相补”——→“相似句股理论”——→重差术的发展过程，论证 令 人信服。但若仅用比例重差来证明，则海岛图不应再添许多线段以补成若干长方形，这显与杨辉、李潢所见的旧海岛图不同，一个可能是杨李所见的旧图并非刘徽所用的重差图。可惜刘徽的《重差图说》已经失传，难以印证。不论如何，这些证明在细节上略有出入，基本上都体现了我国古代几何学的固有特色，与以平行线等作为中心概念的欧几里得几何体系异其情趣，这应该是肯定的。

## 参 考 文 献

[1] 钱宝琮校点；《算经十书》，中华书局，1963。

〔2〕《周髀算经》。
〔3〕魏刘徽：《九章算术注》，263。
〔4〕魏刘徽：《海岛算经》，263。
〔5〕赵爽：《日高图说》。
〔6〕宋杨辉：《续古摘奇算法》，1275。
〔7〕利玛窦口译，徐光启笔受：《测量法义》，1607—1608。
〔8〕明徐光启：《测量异同》。
〔9〕清李潢：《海岛算经细草图说》，1820。
〔10〕清李潢：《重差图序》，1820
〔11〕李俨：《重差术源流及其新注》《学 艺》，1926，7卷8期，1—15。
〔12〕李俨：《中国数学大纲》，科学出版社，1958，编Ⅰ章9。
〔13〕钱宝琮：《中国数学史》1964。
〔14〕白尚恕：《刘徽海岛算经造术之探讨》。
〔15〕李继闵：《从句股比率论到重差术》，全国自然科学史学术会议，1980。
〔16〕Y. Mikami, The development of mathematics in China and Japan, 1913.

# 出入相补原理

我国古代几何学不仅有悠久的历史，丰富的内容，重大的成就，而且有一个具有我国自己的独特风格的体系，和西方的欧几里得体系不同。这一几何体系的全貌还有待于发掘清理，本文仅就出入相补原理这一局部方面，就所知提出几点，主要根据是流传至今的以下各经典著作：

《周髀算经》（简称《周髀》），

《九章算术》（简称《九章》），

刘徽《九章算术注》（简称《刘注》），

《海岛算经》（简称《海岛》），

赵爽《日高图说》和《句股圆方图说》（简称《日高说》和《句股说》）。

田亩丈量和天文观测是我国几何学的主要起源，这和外国没有什么不同，二者导致面积问题和勾股测量问题。稍后的计算容器容积、土建工程又导致体积问题。我国古代几何学的特色之一是，依据这些方面的经验成果，总结提高成一个简单明白的一般原理——出入相补原理，并且把它应用到形形色色多种多样的不同问题上去。以下将列举这些不同的应用。

## 一、简单应用和比例理论

所谓出入相补原理，用现代语言来说，就是指这样的明显

事实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。

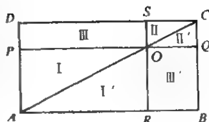


图 1

应用这一原理，容易得出三角形面积等于高底相乘积的一半这一通常公式，由此以定任意多角形的面积。作为另一简单实例，可以观察图 1，如果看作把 $\Delta ACD$ 移置 $\Delta ACB$ 处，又把Ⅰ、Ⅱ各移置到Ⅰ′，Ⅱ′，那末依出入相补原理有：

$$Ⅲ = Ⅲ′，\square PC = \square RC\cdots\cdots(\text{指面积相等})$$

由此得

$$OP\times OS = OR\times OQ,\ PQ\times QC = RB\times BC,\ \cdots\cdots$$

因而 $AR:OQ = OR:CQ,\ AB:OQ = BC:QC,\ \cdots\cdots$

就是相似勾股形 $ARO$ 和 $OQC$、$ABC$ 和 $OQC$ 的相应勾股成比例。并且可以导出其他相应部分的比例关系。

以上这些极简单的结果虽然没有在《九章》中明确说出，但是《九章》中曾经多处用这些关系来解决各种具体问题，参看《刘注》。

## 二、测望术和重差理论

在《周髀》中，就有用两表测日影以求日高的方法，公式是

$$\text{日高} = \frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{影差}} + \text{表高}。$$

如图 2，其中 $A$ 是日，$BI$ 是地平面，$ED$、$GF$ 是先后两表，$DH$ 和 $FI$ 是日影。《海岛》改测日的高为测海岛的高，同图 $AB$ 是海岛，$H$、$I$ 是人目望岛顶和两表上端相参合的地方，于是日高公式成为：

$$\text{岛高}=\frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}。$$

刘徽证明和所用的图都已经失传，但是据现存《日高说》和残图以及其他佐证，原证当大致如下：

由出入相补原理，得

$$\square JG=\square GB, \qquad (1)$$

$$\square KE=\square EB, \qquad (2)$$

相减得 $\square JG-\square KE=\square GD$,

所以 $(FI-DH)\times AC=ED\times DF$,

即 表目距的差×(岛高－表高)＝表高×表距。

这就得到上述公式。

图 2

按《海岛》共九题都属测望之类，所得公式分母上都有两测的差，重差这一名称可能由此而来，其余八题公式都可依出入相补原理用和上面类似的方法证明，从略。

元朱世杰《四元玉鉴》中有和《海岛》完全类似的几个题，朱世杰对这些题的解法应该有古代相传下来的一定来历。依照朱对海岛一题的解法，我们认为原证比上面所示的可能稍复杂一些。如图3，现在重作证明如下：

由出入相补原理除（1）、（2）外又有

$$\square PG=\square GD, \tag{3}$$

由（1）、（2）、（3）得

$$\square JN=\square EB=\square KE,$$

所以 $$IM=DH, \tag{4}$$

$$FM=FI-IM=FI-DH=\text{表目距的差。}$$

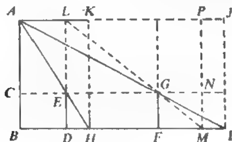


图3

由（3）式就得到海岛公式。

如果依照欧几里得几何体系的习惯证法，那就自然应该添一平行线 $GM'\parallel AH$，如图4，再利用相似三角形和比例理论作证。清代李潢以及近代中外数学史家大都依这法补作海岛公式证明，这当然不是刘徽的原意，也和我国古代几何传统相违背。注意作平行线的时候，应有 $FM'=DH$，和前面（4）式相比，$M$ 和 $M'$ 的位置完全不同。

明末利玛窦来我国，他的主要学术工作之一是介绍欧几里得几何体系。他曾口授《测量法义》一书，其中载有和海岛题

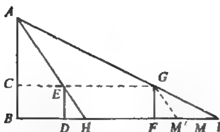


图 4

完全类似的一题。在他所作的证明中，需要在 $FI$ 上取一点 $M$ 使（4）式成立，再用比例理论作证，如图 4 。按常理来说，利玛窦应该作平行线而取 $M'$ 使得 $FM'=DH$，但是他一反欧几里得惯例而和我国古代传统不谋而合，颇使人迷惑不解。现在提出这一问题，希望大家共同探讨。

## 三、勾股定理

在《周髀》和《九章》中，都已经明确给出了勾股定理的一般形式：勾$^2$＋股$^2$＝弦$^2$。虽然原证不传，但是据《句股说》以及《刘注》，都依出入相补原理证明，并且有遗留到现在可以用来作证的赵爽残图，这几方面互相参照，原证应该大致如下：如图 5 ，勾股形是 $ABC$，$BCDE$ 是勾方，$EFGH$ 是股方，把二者的和 $DBCFGH$ 的 $\Delta BDI$ 移到 $\Delta ABC$，$\Delta GHI$ 移到 $\Delta AFG$，就得到 $ABIG$＝弦方$^2$，由此得到勾股定理。

欧几里得《几何原本》中勾股定理的证明如图 6 所示，其中要先证有关三角形全等形以及三角形面积的一些定理，为此要做不少准备工作，因而在《几何原本》中直到卷一之末出现这一定理，而在整个《几何原本》中几乎没有用到。而在我国，

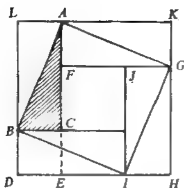
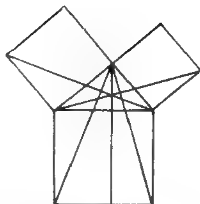


图 5


图 6

勾股定理在《九章》中已经有多种多样的应用，成为两千来年数学发展的一个重要出发点，参阅以下各节和文末附表。在东西方的古代几何体系中，勾股定理所占的地位是颇不相同的。

## 四、勾、股、弦及其和差互求

勾、股、弦和它们之间的和差共九个数，只须知道其中的两个就可以求得其他几个。除勾、股、弦互求就是开平方之外，《九章》勾股章中有不少这方面的问题。

1. 知股弦差、勾，求股、弦（五题）。

2. 知勾股差、弦，求勾、股（一题）。

3. 知股弦差、勾弦差，求勾、股，弦（一题）。

4. 知股弦和、勾，求股、弦（一题）。

各题都列出了一般公式，《句股说》的许多命题也属这一类，《刘注》还给出了证明，公式的来历和证明的方法都依据出入相补原理，有的也用比例原理作别证。试以勾股章第十三折竹题为

例。题设竹高已知，竹在某处折断，竹梢着地，着地处和竹根距离也已知。求折断处的高度，如图7。如果以着地处和竹根的距离作为勾，就是从股弦和、勾求股的问题，《九章》原文给出的公式是：

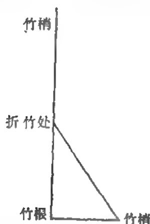


图7

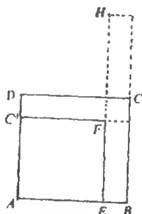


图8

股弦差 = 勾²/股弦和，

《刘注》又给出了另一公式：

$$股 = \frac{股弦和^2 - 勾^2}{2 \times 股弦和}。$$

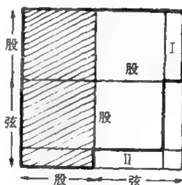


图9

为了证明前一公式，可以考虑图8，其中正方形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 的边各是勾股形的弦和股。依勾股定理曲尺形 $EBCDGF$ 的面积应该等于勾²。现在把□$FD$ 如图移到□$CH$，那末依出入相补原理，□$BH$ 的面积是勾²，而它的边长各是股弦和、股弦差，就得到上面的前一公式。

另一公式的刘徽证明也相类似。试考察图9，其中右下角

曲尺部分面积依勾股定理等于勾$^2$，所以粗黑线围成部分等于股弦和$^2$－勾$^2$。把长方形Ⅰ移到Ⅱ，依出入相补原理，这一面积是斜线部分的两倍，就是2×股×股弦和，由此就得到另一公式。

## 五、秦九韶公式

秦九韶《数书九章》中有一题是已知不等边三角形田地三边的长（称大斜、中斜、小斜，以下简记为大、中、小），求田地面积。秦九韶的解法相当于下面的一般公式：

$$面积^2=\frac{1}{4}\left[小^2\cdot大^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2}\right)^2\right]。$$

秦的公式来历不明，证明也失传了。现在补作一证如下：

作大斜上的高分大斜成两部分，作为勾股形的股和弦，如图10。由于《九章》已给出三角形面积等于1/2×高×大，所以问题归结为怎样求高，或怎样求股。由于



图10

$$股弦和=大，$$

$$勾^2=弦^2-股^2=中^2-小^2，$$

所以问题归结为怎样从股弦和、勾求股。依上节的刘徽公式，得：

$$股=\frac{股弦和^2-勾^2}{2\times股弦和}=\frac{大^2-(中^2-小^2)}{2\times大}，$$

$$高^2=小^2-股^2=小^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2\times大}\right)^2。$$

由此就得到秦的公式。

按秦公式的形式十分古怪，当是依某种思路自然引导到这一形式的。上面的证法颇为自然，也符合我国古代几何的传统特色，说它是原证，也是不无可能的。

在西方有所谓海伦公式（$a$、$b$、$c$是三角形三边的长）：三角形面积$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$，

这一公式形式十分漂亮。正因为这样，如果已知海伦公式而再来推出秦的公式，将是不可思议的，相反，从秦的公式化简成海伦的公式，乃是比较自然的发展。

据此我们至少可以断言，秦的公式是独立于海伦公式而得来的。

关于海伦的生平，从公元前二世纪到公元后十世纪以后，数学史家聚讼纷纭。至于海伦留传到现在的著作，历代都重新编纂过，有所增改，已经不是本来面目。这是熟悉希腊数学史的应予澄清的事，这里就不考虑了。

## 六、开平、立方

从勾、股求弦，先把勾、股平方后相加，再开平方就得弦。因而勾股定理的应用自然导致开平方的问题。事实上，《周髀》中已经给出了若干具体数目的平方根，而在《九章》中，更详细说明了开平方的具体方法和步骤。这一方法的根据是几何的，就是出入相补原理。试以求 55225 的平方根为例。这相当于已知正方形 $ABCD$ 的面积是 55225，求边 $AB$ 的长，如图 11。按我国记数用十进位位值制，因 $AB$ 显然是一个百位数，所以求

$AB$ 的方法就是依次求出百位数字、十位数字和个位数字。先估计（《九章》中用“议”字）百位数字用 2，因而在 $AB$ 上截取 $AE=200$，并且作正方形 $AEFG$，它的边 $EF$ 的两倍称为“定法”。把 $AEFG$ 从 $ABCD$ 中除去，所余曲尺形 $EBCDGF$ 的面积是 $55225-200^2=15225$。其次估计十位数字是 3，在 $EB$ 上截取 $EH=30$，并且补成正方形 $AHIJ$。从 $AEFG$ 所增加的曲尺形 $EHIJGF$ 可以分解成三部分：$\square FH$，$\square FJ$，$\square FI$，面积依次是 $30\times EF$，$30\times FG$，$30^2$，其中 $EF=FG=200$，所以从 $ABCD$ 中除去 $AHIJ$，所余曲尺形 $HBCDJI$ 的面积是

$$15225-(2\times 30\times 200+30^2)=2325。$$

现在再估计个位数字是 5，在 $HB$ 上截取 $HK=5$，并补作正方形 $AKLM$，从 $ABCD$ 中除去后所余曲尺形面积和前同法应该是

$$2325-(2\times 5\times 230+5^2)=0。$$

由此知 $K$ 和 $B$ 重合而 55225 的平方根恰好是 235。

求立方根的方法和步骤和这相似，但是要把一立方体逐步进行分解，比平方根求法稍复杂，所依据的仍是出入相补原理。这在《九章》中也有详细叙述。

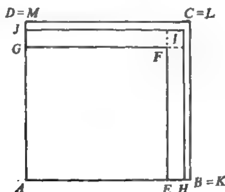



图 11

我国开平立方法来源很古，它的几何本质十分清晰，而且从方法上可以看出我国独有而世界古代其他民族所无的位值制记数法的高度优越性。不仅这样，至迟到十一世纪中叶，我国就已经把开平立方法推广到开任何高次幂，就是所谓“增乘开方法”，并且出现了有关的二项式定理系数表，就是所谓“开方作法本源图”。从这一方法的几何渊源看来，如果说当时的我国数学家已经有高维方体和高维几何的雏影，似乎不是全无根据的。

## 七、解二次方程

在开平方的过程中，曾经出现象图 8 中黑线部分那样的图形，其中 $2\times EF$ 称定法。开平方在求得 $AE$ 后，其次几步在于从曲尺形 $EBCDGF$ 的已知面积求得 $EB$。现在把 □$DF$ 移到 □$CH$，那末依出入相补原理，□$BH$ 面积已知，此外 □$BH$ 的两边 $EH$ 和 $EB$ 的差就是定法 $2\times EF$，也有已知数值。因而求 $EB$ 的问题可以转化为下面的问题：

(A) 已知一长方形（□$BH$）的面积、长阔差，求长阔。

反过来，这一问题的解法，可依开平方中第二步以下的方法求得，称为“开带从平方”。自《九章》以来用下面的语句来表达：

(B) 以（长方形面积）为实，（长阔差）为从法，开方除之，得（阔）”。

以上“从法”一名，当来自开平方过程中的“定法”，“开方”一词也说明了它的来历。

下面的例取自《九章》，如图 12。图中 $ABCD$ 是一方城，

出北门北行若干步到$G$有木，出南门南行若干步到$F$再西行若干步到$H$，恰可望见木$G$，问题是求方城每边的长。据《刘注》的方法是依出入相补原理得$\square EJ=2\square EG=2\square KG=2\times$北步$\times$西步。又$\square EJ$的长阔差是南步+北步。所以解法是以$2\times$北步$\times$西步为实，以南步+北步为从法，开平方除之，得$EI$，也就是方城边长。

不仅应用开平方法可得问题（$A$）的数值解，而且应用出入相补原理，还可以求得解答的精确表达式。如果以长方形的阔为勾，长为股，那末问题（$A$）相当于：

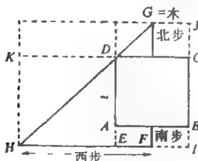


图 12

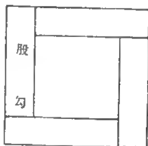


图 13

（$C$）已知勾股积、勾股差，求勾、股。

为此考虑赵爽残图如附图13。图中大小两正方形的边长各是勾股和、勾股差，所以得

勾股和$^2=4$勾股积+勾股差$^2$。由此得勾股和，因而得勾和股。同样也可从勾股和、勾股积求得勾和股，这一方法可以参阅《勾股说》的末一命题。

宋元时期明确引入了未知数的概念。如果以$x$（当时称为天元一）表长方形阔，那末问题（$A$）相当于解一个二次方程

$$x^2+ax=b,$$

其中 $a$ 相当于从法，$b$ 相当于实。所以在古代实质上已经给出了这一形式二次方程（$a$、$b$ 都是正数）的近似解和精确解，前者在宋元时期发展为求任意高次方程的数值解法，后者虽文献散佚不可查考，但是据唐初王孝通的著作以及史书关于祖冲之引述看来，不能排除我国曾经对三次方程用几何方法求得精确表达式的可能性。参阅钱宝琮《中国数学史》关于祖冲之开差幂、开差立的讨论。

在其它各国，九世纪花剌子模的代数学名著中列举了各种类型二次方程的精确解法，它的方法是几何的，它的精神实质和出入相补原理颇相类似。十六世纪意大利数学家关于三次方程解法，也完全是几何的。

## 八、体积理论和刘徽原理

如果规定长方形的面积是长阔的积，那末依据出入相补原理，容易得到：

(1) 三角形面积 $=\frac{1}{2}\times$ 高 $\times$ 底。

由此可以完全奠定平面多角形的面积理论。但是在空间情形，如果规定长方体的体积是长、广、深的积，是否依据出入相补原理，可以推得

(2) 四面体体积 $=\frac{1}{3}\times$ 高 $\times$ 底面面积，

由此以建立多面体的体积理论，就不是那末明显而是极为困难的问题。欧洲直到十九世纪末，才把它作为一个难题明确地提出来。1900 年希尔伯特在国际数学会上所作著名讲演中，把体

积理论列为二十三个问题之一。这一问题立即为德恩所解决，答案是否定的：两个多面体要分割成彼此重合的若干多面体，必须满足某些条件，通称德恩条件。自此以后直到 1965 年，一位瑞士数学家西德勒才证明了德恩条件也是充分的。但是问题决不能认为已经彻底解决。从希尔伯特直到晚近，多面体体积理论仍不断成为一些知名数学家讨论的课题。德恩条件叙述复杂，也难以认为是合宜的最后形式。

在这种情势下，看看中国古代对这一问题的处理方式是不无有启发性的。

《九章》以至《刘注》解决体积问题的出发点是把一般的多面体分解为一些基本的立体。先把一长方体斜剖为二，如图 14(1)，得两堑堵，如图 14(2)，再把堵堑斜剖为二，一个是阳马，如图 15(1)，一个是鳖臑，如图 15(2)，其中鳖臑的特征是 $AB$ 和平面 $BFG$ 垂直，$FG$ 和平面 $ABF$ 垂直。由于任一多面体可以分割为四面体，而任一四面体可以分割为六个鳖臑，如图 16，所以问题归结为求鳖臑（以及阳马）的体积。依刘徽原话，就是所谓阳马、鳖臑，“功实之主也”。

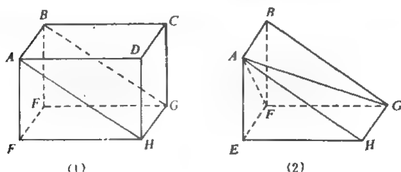



图 14

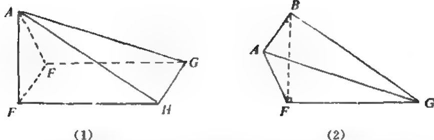


图 15

其次的问题是怎样求得阳马和鳖臑的体积。如果长方体成为立方体，那么分解所得的阳马的体积是鳖臑的两倍。刘徽作了长篇的分析，得出结论是：这个论断普遍成立，用刘的原话是："阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。"我们把它称为

**刘徽原理** 斜解一长方体，所得阳马和鳖臑的体积的比恒是二比一。

从这一原理容易得到鳖臑和阳马的体积公式。由此又容易得到(2)式，因而整个多面体的体积理论可奠基于刘徽以及出入相补这两个原理之上。

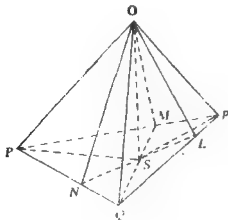


图 16

刘徽对自己原理有详细的分析说明，实际上就是这一原理的证明。遗憾的是因为年代久远，文字有错误脱落，已经难以索解，但是无疑是一极限过程的证法。把这一段彻底弄清，将是一件很有意义的工作*。按希尔伯特和他的后继者们的研究指出，体积理论和面积理论不同，除要有出入相补原理外，必须辅以连续一类公理。也有人（例如沙顿诺斯基，1903 年）提出排除连续公理，直接应用(2)式作为建立体积理论的基础。但是这样就要先证明(2)式中高和底面积的乘积凡四都彼此相等，这既不明显也不简单，似不如刘徽原理和出入相补原理的显豁自然。

总之，多面体的体积理论到现在还余蕴未尽，估计中国古代几何中的思想和方法，或许对进一步的探讨还不无帮助。

## 九、羡除公式

《九章》中列举了各种多面体的体积，依据的就是出入相补原理和阳马鳖臑公式。现在以羡除即隧道（图 17）为例，图中 $ABCD$ 是地面，成一梯形，$CDEF$ 是隧道的一端，成垂直平面中的梯形。整个隧道依剖面 $IJK$ 对称。$EG$、$FH$ 和 $CD$ 垂直是隧道的深，$IJ$ 是隧道地面的长，$CD$、$EF$、$AB$ 各称上广、下广、末广。《九章》给出的公式是：

$$\text{羡除体积} = \frac{1}{6}(\text{上广} + \text{下广} + \text{末广}) \times \text{深} \times \text{长}。$$

---

*这一段事实上早已弄清楚，参阅近年来丹麦华道安与自然科学史研究所郭书春的一些论著以及有关论文。

《刘注》的证法是先把羡除分解，如在图 17 中 $CD>AB>EF$ 的情形，分解成一个堑堵 $EFGHLM$，两个小鳖臑 $AGEL$ 和 $BFHM$，两个不正规大鳖臑 $ACEG$ 和 $BDFH$，再应用堑堵、鳖臑公式和上一节公式(2)，就得到这一公式。这一方法在《九章》中用来求得例如刍甍、刍童、盘池、冥谷等多面体的体积公式。

如果依 $IJK$ 剖面取羡除的一半，所得 $IJKACE$ 如图 18 是一斜截直柱体，是把一个以勾股形为底面的直柱体斜截而成，它的体积是三高平均值和底面面积的积。因由任意曲面所围成的立体可以看作近似地由这样的斜截直柱体构成，所以据此可以得出函数 $f(x,y)$ 的积分近似公式，犹之微积分中求曲线下面积的辛普森积分近似公式。因而羡除公式具有重要意义。

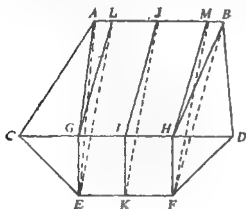



图 17

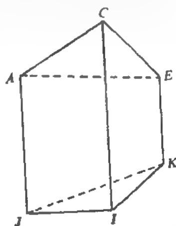



图 18

在西方，斜截直柱体的体积公式最早见于 1794 年勒根德尔所著《几何原理》一书，因此也称为勒根德尔公式。勒根德尔一书是从欧几里得《几何原本》以后最早可以代替《几何原本》的名著，它的有关公式的证明同样依据四面体体积公式，

但是它的分解方法和《刘注》不同。此外某些多面体西方也有不同的分解法和证法，不妨中外参照，加以比较。

## 十、球体积和祖暅原理

从《九章》到《刘注》，我国对多面体的体积已经建立了相当完整的理论体系。但是对于求曲面围成的立体，特别是球的体积问题，却遇到了困难。这一球体积问题，直到南北朝祖暅才完全解决，为此并且提出了所谓

**祖暅原理** 幂势既同，则积不容异。

这一原理在公元十七世纪以卡瓦利里原理的形式重见于欧洲，成为微积分得以创立的关键性的知识。

祖暅关于球体积公式的证明见于《九章》的唐李淳风注，论证极其详细清晰。证明分三步：

(1) 在一立方体中依两不同方向作两内切圆柱体，它的共同部分称"牟合方盖"。取立方体的$\frac{1}{8}$，其中方盖部分称内棋，此外三部分称外棋。依祖暅原理可得，

$$\frac{1}{8}\text{球体积}:\frac{1}{8}\text{方盖体积}=\pi:4。$$

(2) 从立方体的$\frac{1}{8}$割出一倒立的阳马，应用勾股定理证得三外棋等高处截面积的和跟阳马同高处的截面积相等。

(3) 再应用祖暅原理，知三外棋体积的和跟阳马体积相等。

由阳马的体积公式，就可以从上述三步得球体积公式。

按牟合方盖是刘徽所引入的，第一步的结果实质上也已经为刘徽所求得。事实上，在《刘注》中，他已经多次应用了祖暅原理来求曲面围成立体的体积，例如从方堡垮求圆堡垮，从方锥求圆锥，从方亭求圆亭，都已经使用这方法。祖暅的功绩，不仅在于具体求出了牟合方盖因而求出球的体积，更在于把实际上已知并且已经广泛应用的实践经验总结提高到一般原理的形式。是否应该把祖暅原理改称为刘祖原理，是可以商讨的。

从祖暅原理可以立即得出前面讲到的刘徽原理，因而多面体的体积理论也可以建立在出入相补原理和祖暅原理这两个浅显易明的基本原理之上。在欧洲，直到希尔伯特的《几何基础》问世以后，二十世纪初年，才有人（例如绪思）考虑依卡瓦利里原理以建立体积理论的问题。

## 十一、其　他

《九章》中有丰富的几何学内容，即使局限于出入相补原理，除了已经见于前面的各节的以外，还有一些成果成为我国数学以后发展的重要出发点。例如所谓勾股容圆问题，在李冶的《测圆海镜》中已经有了很大的发展。又如前面提到过的所谓方城问题，在秦九韶、李冶等著作中已经把方城改成了圆城，这是旧有方法所不能解的。为此宋元时期创立了所谓天元术一类新的理论和方法，不仅可以用来解决许多新问题，对老的问题（所谓古问）也提供了新的有力工具，和老的方法（所谓古法）相比可以“省功数倍”。这些新理论新方法的实质在于几何的代数化，乃是解析几何的前奏，也是近代代数学的前驱。

出入相补、刘徽、祖暅等一般原理的建立，说明我国古代学者具有高度的抽象概括能力，善于在深入广泛的实践基础上往高里提。这些原理之简单易明正可和它们的应用之广互相辉映。这是我国古代数学的一种独特风格，着重在问题的解决以及解决的一般方法和一般原理原则。同样的风格也可见之于几何的代数化、位值制记数法等等。这和西方数学之偏重于概念和概念之间的相互逻辑关系，是异其旨趣的。

我国数学经典著作散佚的多而保存的少，就象祖暅原理，也只靠李淳风一注才得以留传下来。象这一类重要成果而失传无从考查的，当不在少数。尽管如此，只从留传至今的典籍看来，我国数学的生产实践方面的渊源和发展演变的线索，仍旧很分明，参见下面两个附表。

表　一

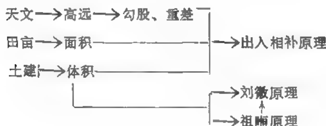
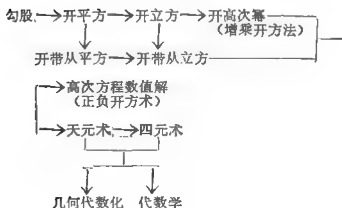



表　二



# 《〈九章算术〉注释》的序

《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著，不仅指导着我国数学的发展达两千余年之久，而且对世界数学的发展也有不可估量的巨大影响，线性联立方程组的解法及有关正负数的引入祇其一例而已。我国古代数学有它自己的体系与形式，与西方之以欧几里得几何为代表的所谓公理化体系者旨趣既异，途径亦殊。《九章算术》与《几何原本》东西辉映，无疑是数学史上的两大传世名著，也是现代数学的两大源泉。

《九章算术》的刘徽注是数学上的又一伟大成就。刘徽注不仅提出了丰富多采的创见与发明，并以严密的数学用语描述了有关数学概念，对《九章算术》中的许多结论给出了严格证明。他所采用的证明方法，不仅有综合法、分析法，而且有时还兼用反证法。他沿袭我国古代的几何传统，使之趋于完备，形成具有独特风格的几何体系。刘徽的发明、创造对后世人有所启发，即使对于现今数学也有不少借鉴之处。从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里得、阿基米德等相提并论。

遗憾的是，像传本《九章算术》与刘徽注这样的伟大著作，由于古今文字迥异，专门名词与现代通用者更大不相同，加上文字简略，用字深奥，使当代有志者难于领略。白尚恕同志博征详考，对全书用现代通俗易懂的语言详加注释，既使国内外

对我国古代数学有兴趣的人士易于涉猎了解，也使研究我国古代数学的发展及刘徽与其他人如李淳风等的创见有途可循，为之称便。这是一件十分有意义的事。为此不揣冒昧，谨志数语，聊为此书出版作贺。

# 在中外数学史讲习班开幕典礼上的讲话

同志们：

今天是中外数学史讲习班的开幕典礼，我首先在此表示祝贺！我想，这种讲习班决不会只是办一次，以后可能每一年或至少每两年总要举行的。这不仅对于数学史的研究，而且对于整个数学的发展都是一件很重要的事！

了解历史，特别是数学史，正象江老已经说过的，它的重要意义是不言而喻的。假如你对数学的历史发展，对于一个领域的发生和发展，对一个理论的兴旺和衰落，对一个概念的来龙去脉，对一种重要思想的产生和影响等这许多历史因素都弄清了，我想，对数学就会了解得多，对数学的现状就会知道得更清楚、深刻，还可以对数学的未来起一种指导作用，也就是说，可以知道数学究竟应该按怎样的方向发展可以收到最大的效益。

这个讲习班，现在是取名为“中外数学史讲习班”。前面有“中”“外”两字，而且讲习的课程是分两部分，前面一部分是讲西洋的数学史，后面一部分是讲中国的数学史。我想，对数学史的现状来说，这样的做法也是比较合适的。当然，这是第一步，以后还应该有第二步、第三步。西洋数学史和中国数学史分成两段来讲，是符合当前情况的，也是符合某些历史

上的情况的。依我个人的理解，也不一定很正确，现在大学学的数学是西洋数学，是从希腊欧几里得系统下来的数学。从历史来看，我总觉得有两条发展路线，一条是从希腊欧几里得系统下来的，另一条是发源于中国，影响到印度，然后影响到世界的数学。这一条线现在不太显著，所以一讲到数学就是欧几里得统治下的、以演绎为主的公理化数学。可是，如果看看中国古代的数学就会知道它的味道、它的体系或者说它的思想和西洋数学是不一样的。我们中国的古代数学，看不出有什么公理、定理这一套的词，演绎体系也不是很明显的。可是，它自己有一套体系，这个体系也不是很清楚。但是我想可以借用严敦杰老先生的话来说明。严敦杰老先生在数学史上的成就是非常高的。在古代，中国的天文学和数学是不分家的，许多历法书里就有很多数学。严老先生对中国天文历法的研究也同样有非常高的成就。我理解严老有这样的想法：中国的天文发展与西方不一样，所以你必须从中国自己的角度来考虑中国自己的天文，然后才能够弄清中国的天文是怎么回事。你不能把西方的那个天文学生搬硬套到中国天文学的发展上来。*我觉得严敦杰老先生对天文的这种想法也适用于中国的数学。当然，这要做大量的研究工作才能弄得清楚，而这在目前还不容易做到。总而言之，我觉得数学的发展有这么两个大的体系，大的思想，大的方向。它们是很不相同的。不过从利玛窦东来把西方数学输入之后，我们中国的那套思想就给排斥掉了。很少人能够懂得这一点，只有极少数数学史家知道不一样。我们的老前辈李俨先生、钱宝琮先生，还有现在健在的严敦杰先生，在他们的著作

---

* 参看例如下文的最末一段，严敦杰，《中国古代的黄赤道差计 算法》，载《科学史集刊》，1958 年，第一期。

里经常可以看到他们有这种意见和这种看法。可是很难把它系统整理成一套…（因转磁带，缺了一段）体系。

如果“公理化”是导源于希腊欧几里得的西方数学的主要思想，则我认为，我们中国的数学注重的“着眼点”就完全不一样。我用一个名称，叫“机械化”。“机械化”这个词过去是没有的，但现在它有特别的意义。现在是所谓“第三次浪潮”，是计算机、信息时代。我国古代数学的精髓是一种机械化的思想，一种机械化的方法，正好符合于现时代的要求和状况。因此，我觉得对中国古代的数学要特别加以重视。这一点在希腊欧几里得体系里是找不到的。我的这个看法是比较个别的，象江老说的是“一家之言”吧，这里提出来，希望今后研究数学史时能注意这一点。

刚才江老谈到一本数学史名著，即M·克莱茵的《古今数学思想》。它着重在数学的思想，讲数学思想在历史上的发生、发展和影响。这本书是要把古今的数学思想介绍给读者，这些数学思想作者都是非常了解的。可是，作者讲它的书里不包括中国的数学，因为他没法儿懂。这还是比较实事求是的精神。书里还讲到许多印度数学，没有讲中国的数学。我想，这是数学史上这几十年应该弄清楚的一个问题。

在钱宝琮先生的《中国数学史》中，就提到中国与印度数学的关系。在英国，有一位数学史家叫 Kaye，他就明确地说过，印度数学是欠了中国数学的债的，印度的数学是从中国传去的。印度的数学有一个特点，它与西方的不一样，就是我说的机械化思想。这是占居主要的、统治地位的思想。现在，这种思想还不显著，可是也有些露头。最近这些日子，国外有一批学者来国内举办数学研究生教育研究中心，其中有一位对中

国古代的数学史很重视。我以前不认识他本人，但我对他的老师很有兴趣。他的老师是印度人，写过一篇文章，登在美国数学会月刊上，叫做《代数几何漫步》。代数几何是现在最难、最时髦而且认为是非常重要的一个领域。他的《代数几何漫步》中提出一种主张，这种主张用我们现在的话来讲，就是他不赞成古代希腊的那种做法。他是印度人，他就推崇印度人的那种作法，特别提到印度在十一、二世纪的那个数学家 Bhaskara。他很赞成的那种作法，实际上就是我刚才讲的中国古代的机械化。他认为，这种方法也能够取得西方欧几里得的那种成功。当然，他的主张大家都还不接受。他这么说，但是拿不出太多的东西来，他也做了一些工作，可是还不足以说明这种方法的优越性。但是，我觉得，他的主张是代表了某些人，他们已经注意到了这种机械化的方法有着潜在的巨大力量。我想，将来经过努力，是会发出芽来、开出花来的。当然，这是要经过很大的努力才行的。

这个讲习班第一次办，先介绍西洋数学史，然后再介绍中国数学史，这种方式是很合适的。第一步就是要把有关的知识普及给大家。然后，许多同志在学校里讲数学史的课，至少把现在已经有的成就普及到广大的青年一代，再下去，就要考虑中西方数学的交流与比较。我过去对数学史是有兴趣，偶尔翻翻，并没有认真下功夫。可是，我对某些书籍看了很气愤！比如说《数学简史》，已翻译成中文，作者斯特洛伊克是一个外国的共产党员。是一个有一定地位的数学家。他写这本书，应该说，有许多地方是写得很出色的。比如说，我非常赞成的一个地方，他说现在的中学教科书可以明显看出两个部分：一个部分是几何里面的欧几里得的希腊讲法，还有一部分算术、代

数是东方色彩。如果把中学教科书拿出来看，这两个体系是贯穿在一起但并不是很调和的。也就是说，希腊的那个体系想在中学占统治地位，但它又是统治不了的。而且是根本不可能的。这是我的看法，也许武断了一些。当然，它还是很重要的。斯特洛伊克在那本书中把这一点指出来是很出色的。可是，有的地方我是不满意的。比如，他对中国的数学也讲了一些。他提到两个人，一个是祖冲之，一个是秦九韶。他们非常重要而且成绩很大。可是祖冲之许多东西失传了，你就没办法说、没法全部理解它。斯特洛伊克提到祖冲之，提到$\pi$的计算，我觉得这一成就对数学的发展不是决定性的。中国数学具有重大意义的有的是，$\pi$的计算不是最重要的。我认为，对圆周率来一个更精确的估计，这本身不是重要的。而得到这个结果的方法可能非常重要。但是它现在失传了，你也说不上是怎么一回事。秦九韶的"大衍求一术"也是这样的，它对数学的发展不是决定性的。有决定性意义的有的是，不能以他为代表。这还可以说斯特洛伊克是介绍了这两位数学家，他们的确重要，但我以为还不是中国数学的代表。然而，有一处引起我非常反感和气愤的是他讲《海岛算经》。在《海岛算经》中有一个公式，它是公元三世纪（263年）得到的。那个时候，应该有东西方数学交流了。斯特洛伊克下了一个武断的结论，说这是从西方传过来的。我觉得这简直是荒谬透顶！这里有一种西方学者们牢不可破的"优越感"，即：我这里什么都有，你的肯定是从我西方传过去的。我想，他是受这样一种思想支配的。

前几年，有一位比利时的数学史家名叫莱伯热西特(U·Libbrecht)，他到中国来座谈，我参加了。他讲过一些话，大意是：把希腊抬得那么高，是当时欧洲人要从落后状态中解放出

来，需要有一种思想来鼓舞。他用了一个名称叫"欧洲中心论"（我是第一次听到），认为什么文化都是发源于欧洲的，你们东方嘛，都是"野蛮民族"，一切文化都是从我们欧洲传过去的。莱伯热西特提到这样一个名称，我觉得是相当中肯的。

我讲这一些，是要说明：我们讲数学史现在把中、西分开来介绍，将来更重要的一步是要弄清楚东、西方数学的关系。东方数学和西方数学，正象斯特洛伊克那本书里讲的，是明显不同的两个体系，有不同的思想在里面。要说那么长的岁月里没有交流嘛，这是不可想象的。当然，不是象"欧洲中心论"和"西方至上论"的那些学者讲的，东方的东西是从西方传过去的。这是荒谬的。我们应该作为历史问题来考虑，应该实事求是，从我们掌握的资料来追查当时东方、西方学术上的交流是怎样的。一般说来，总是文化高的地区流向文化低的。我曾经拜访过北大历史系或是其他什么系的一位教授，是江老陪我去见的，他是回族人，谈到阿拉伯的数学，他就说过这么一句话："水总是由高处向低处流的，文化一定是从文化高的地方传到文化低的地方。"应该是这样。这是从古代来讲的，现在东方落后了，当然应该接受西方先进的文化，引进他们的成就。所以，现在西方的学术流向我们中国是很自然的，只能说我们中国人自己不争气，落后了。不能不引进。而在古代是相反的，我们东方的文化是处在先进的地位，而欧洲是非常落后的。是一个宗教的"黑暗时代"，没有什么文化。十二、三世纪，他们甚至连加法都认为是学术上很难的东西，数学教科书上讲加法就很不错了。象这样落后的状况，你却说东方的文化不流向西方，而是西方的反而流到东方，这合理吗？当然，这是从"惰

理”方面来讲的，推测应该是这样的，查无实据。这个实据，我想应该是存在的，等待地下资料的发掘，这个发掘既需时日，也靠不住。我们不能把希望完全寄托在这上面。事实上，我相信在现有的资料里面，在我们大家所能看到的、能掌握的资料里，就可以分析出东方、西方交流的情况。这是要下功夫的事！这不光要看数学资料，还要看其他的资料。中国的数学很大一部分是包含在历代的历法即历书中，还有其他的需要借助的东西，下功夫不是一朝一夕的。而且你还要从第一手材料里来，不能从第二手、第三手的材料中来。我们拿一本西方的数学史书来看，它们多得很，其中每一本数学史都是从希腊这样传下来的。那都是第二手、第三手的材料经过种种加工才写成的。你要真正了解历史，就必须追查第一手材料。但是，一开头就看第一手材料是不可能的、先要看第二手、第三手的材料去了解概况，再看第一手材料来检查。看第二手材料、第三手材料讲得对不对。从这方面来检查，这是要下功夫的。要看第一手材料，就要过文字关。少说一点，是希腊文、拉丁文罗。而你要真正弄清楚东、西方交流的历史，你就得掌握阿拉伯文、波斯文，懂得土耳其文，懂得这几个地区的文字。当然，现在我们是不可能做到的。可是，我想我们应该有志气来做！要说文字之难吧，中文大概是全世界文字之中最难的一种。可是你想，刚才我说的那位比利时数学家莱伯热西特，他写的一本《十三世纪的中国数学史》，就是分析、介绍秦九韶的《数书九章》的。他所引用的中文书之多，在我们国内虽不能说没有，至少也只是极个别的人才能看到它们。他的书后面还有一张表，把《数书九章》中的名词做了一个相当于英文的什么名词的工作。他读书是真正读懂了。又如，李约瑟的书中所引的中国书之多，

我看中国人自己的书中也很少能看到那么多的。你看，外国学者就有这种志气，对于中文这么难的一种文字，他们就能学到手并且比大部分中国人学得好(我们有很多人还不太懂古汉语)这是不太简单的！

那么，中国人就没有一种志气、一种能力可以掌握阿拉伯文、土耳其文、中亚细亚各国的文字？我想，这是应该做到的。当然，这对某些人来说是做不到了。比如，江老就做不到了，我也做不到了。我想，白尚恕同志和主讲的几位也难做到了(当然，他们看的书是很多的)，就是在坐的我看也是不太容易。但是，我想，经过这个讲习班，大家在各个高等学校开设数学史这门课，培养出大批新生力量来，他们不仅是有条件而且有责任把东、西方的数学交流这个问题弄清楚。我们的讲习班不仅是在这里讲讲课，回去讲讲课，我认为还应该担负起某种责任来。这个责任，我们这一代事情那么多，不那么容易做到。但我想，许多同志回去开课的时候，应该使下一代把这个任务担当起来。要彻底把东、西方数学交流的问题弄清楚。这是能做到的！

今天，我拉拉扯扯说了一些，有一些是我个人的想法说得好听是“一家之见”，或者是一个人的“狂想”，随便说说。这次讲习班是第一次，以后继续干下去，中国数学史和西方数学史可以在全国各个高等院校普及，将来再进一步深入到两者历史上的关系，就可以呈现一种非常新的面貌！这个讲习班由北师大来主持，也不是很偶然的，因为北师大有历史传统。师大是搞数学教育的。数学教育与数学史是分不开的。数学史在北师大是向来受到重视的。现在有白尚恕同志，还有一些同志，特别是新任的北师大校长王梓坤同志他写过一本《科学发现纵

横谈》里面有许多数学史与自然科学史的材料，深受欢迎，我想，数学史、科学史在北师大就有一个优越的环境了。我就讲到这里。

祝讲习班成功！

# 数 学 论 证

# 数学概况及其发展

数学，这门基础学科，已经越来越渗透到各个领域，成为各种科学技术、生产建设、以至日常生活所不可缺少的有力武器。在现代的科学技术中，如果不借助数学，不与数学发生关系，就不可能达到应有的精确度与可靠性。就科学来说，数学又是通向一切科学大门的钥匙，不仅所谓精确科学，如物理学、化学等已越来越需要较深较多的数学，甚至过去认为以描述为主，与数学关系不大的生物学、经济学等，也处于日益"数学化"的过程之中。这正象马克思早就指出过的那样，"一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。"

数学研究的对象是现实世界中的数量关系与空间形式。数与形，这两个基本概念是整个数学的两大柱石。整个数学就是围绕着这两个概念的提炼、演变与发展而发展着的。数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个概念而进行的。社会的不断发展，生产的不断提高，为数学提供了无穷源泉与新颖课题，促使数与形的概念不断深化，由此推动了数学的不断前进，在数学中形成了形形色色、多种多样的分支学科。这不仅使数学这一学科日益壮大，蔚为大成，而且使数学的应用也越来越广泛与深入了。

我们将以数与形这两个概念为中心对数学的概貌先作一简单描述。

# 一、数学是研究数与形的科学

大体说来，数学中研究数量关系或数的部分属于代数学的范畴。研究空间形式或形的部分，属于几何学的范畴。此外，数与形是有机联系而不是相互割裂的。远古时代，关于长度、面积、体积的量度，我国宋元时代出现的几何代数化，以及十七世纪的解析几何，把形与数这两个概念沟通了起来（因而也把几何与代数这两者沟通了起来）。近代函数概念与微积分方法的出现，在数学中形成了系统研究形、数关系的分析学，成为近代数学中发展最迅速的部分。几何、代数、分析三大类数学，构成了整个数学的本体与核心。在这一核心周围，由于数学通过数与形这两个概念与其它领域的互相渗透而出现了许多边缘学科与交叉学科。这是整个数学王国的一个总的轮廓。

## 先从数说起

最简单最基本的也是从远古时起人类就不得不与之打交道的数，乃是正整数或自然数：

1，2，3，4，5，…

在正整数之间有两种最简单的运算：加法与乘法。研究整数之间的联系与规律的学问叫做数论。从乘法产生了素数*的概念，例如 6（$=2\times3$）是非素数，而 7 由于不能分解成两个比 7 更小的正整数的乘积而是素数（1 不算素数）。正整数的一个基本性质是，它总可以表示成若干个素数的乘积，例如 $12=2^2\times3$，

---

* 对于大于 1 的整数来说，若除它本身与 1 之外再没有其它因子，则称此数为素数。

$18=2\times3^2$，$45=3^2\times5$ 等，而且这种表示方法只有一种。素数

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \cdots$$

在整个正整数序列中的分布是极不规则的，这个素数分布规律的探求产生了许多迄今没有解决的著名难题，哥德巴赫(Goldbach)问题*就是其中之一。这些难题反映了加法与乘法之间的矛盾，用初等方法对这些问题是无能为力的。微积分发明以后，数学家们开始用所谓解析方法来研究数论，开创了解析数论这一学科。我国在哥德巴赫问题上的第一流成果，就是用了解析方法而获得的。

十九世纪中，数学家把整数概念大大扩大了。例如，我们可以考虑所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数，其中 $a$ 和 $b$ 则是通常的整数(正、负或零)，称这些为 $\sqrt{2}$ 域中的“整数”。它们也可以相加、相乘，因之也可以定义“素数”。可以证明任一 $\sqrt{2}$ 域中的“整数”基本上只有一种方法把它表示成若干个“素数”的乘积。但如果考虑所有 $\sqrt{-5}$ 域中的“整数”，即形如 $a+b\sqrt{-5}$ 的数，$a$ 和 $b$ 仍是通常的整数，情形就大不相同了。例如，21与9就都有两种完全不同的方法表示成“素数”的乘积：

$$21=3\cdot7=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5}),$$

$$9=3^2=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})。$$

数学家为了要克服这一困难，创立了理想数或简称“理想”的理论，$\sqrt{2}$ 域与 $\sqrt{-5}$ 域也推广到了一般的代数数域，这种域

---

* 哥德巴赫提出一个论断：“任何一个大于4的偶数均可表示为两个素数之和”，即“1+1”。我国年青数学家陈景润同志已证明了：“大偶数均可表示为一个素数加不超过两个素数的乘积”，即“1+2”，把这个论断的证明向前大大推进了一步。

上整数的理论已发展成为一个当前很活跃的数学分支，叫代数数论，“理想”也已成为现代抽象代数学中最基本的概念之一。

数的概念是不断发展的，从整数出发，人们逐步引进了分数、小数、正负数、无理数等概念而形成了实数系统。由于解代数方程的需要，又引入了虚数、复数而构成了复数系统。这些实数(或复数)之间可以加、减、乘、除，且这些运算遵守通常所谓交换、结合、分配等等规律。数学家们把具有这些运算并满足这种规律的实数或复数全体，称为实数域或复数域。

随着数学的发展，人们又引进了与通常的数很不相同的量，但却具有与数相类似的运算。例如，在力学中力可表示成一个向量，两个力 $F_1$、$F_2$ 的合力是 $F_3$ 时，可以记作 $F_1+F_2=F_3$，而这种加法也遵守交换律与结合律。又如绕固定点 $O$ 各作旋转 $q_1$、$q_2$，如果先作旋转 $q_1$，再作 $q_2$ 所得是一绕 $O$ 的旋转 $q_3$，而先作 $q_2$，次作 $q_1$ 所得是绕点 $O$ 的旋转 $q_4$，就记作 $q_1q_2=q_3$ 与 $q_2q_1=q_4$。一般说来，$q_3$ 与 $q_4$，是不同的旋转。十九世纪时英国的数学力学家汉密尔顿把绕点 $O$ 的旋转视作所谓“四元数”。在四元数间也可以相加、相乘，但其乘法不遵守交换律，即 $q_1q_2 \neq q_2q_1$。

正象旋转之被视为四元“数”那样，许多在数学中陆续出现带有某种运算的事物，如向量、张量、矩阵以至更抽象的元素，都不妨视之为某种广义的“数”。这些“数”都以可以“运算”为其特征。同时，数学家也把研究重点逐渐从“数”的本身性质转移到“数”与“数”间的运算上面。带有某种运算的“数”的集体统称为代数系统。依据运算规律的不同而有各种不同的代数系统，并具有种种各别的名称，例如群、环、域以及

环上的模，与域上的代数，等等。

由于群、环、代数等代数系统在数学中的广泛出现，又由于各种理论与应用中出现的问题，最后往往归结为某种代数系统的研究，代数系统的一般理论发展成了分支繁多（如群论、环论等）的代数类数学，或所谓近代抽象代数学，它已成为整个数学最基本的工具之一。

## 再谈谈形

空间或几何形态是物质存在的躯体与外壳，人类首先注意到的物体的几何形态是大、小、方、圆，诸如长度、面积、体积、相似性等等，它们由于生产上的直接需要而首先从丰富的实践经验总结上升成为理论。在古代，我国与希腊形成了都以度量性为主但各有内容特色的不同几何体系。文艺复兴时期，绘画与建筑的实践经验，以及拿破仑时代军事上工程作图的需要，图形平直透视一类性质的研究，促成了另一种新的所谓投影几何学的出现。它的研究几乎贯串了整个十九世纪。到了上一世纪晚期，另一类几何性质——空间的连续性与连通性——开始受到了重视，由于这些性质虽基本而隐晦，因而不易被发现与处理，只是由于科学的不断发展，许多数学问题都导致空间这类性质的研究，才在较近时期，即十九、二十世纪之交，形成了一门崭新的几何学分支——连续几何学或拓扑学。它的蓬勃发展乃是本世纪数学的一个特色。

几何研究的对象与方法也有很大的变化。例如，以光滑曲面为对象，通过引入弧线长度概念而建立了微分几何学。以后又推广到高维的光滑流形，并由于拓扑学的发展而开展了流形全局性或整体性的几何拓扑研究，引进了各种示性类与示性数。

这些类与数已在最近被应用于磁单极与“基本”粒子等物理学的基本理论研究。又如，由于求解一般的多项式方程组，开展了由这种方程组的解答所构成的空间，即所谓代数簇的研究，形成了所谓代数几何学这一分支。解析几何的出发点是，引进了坐标来表示点的位置。同样，对任一代数簇也可以引进坐标，这为代数几何的研究提供了一个有力的工具。除了研究光滑流形与代数簇这种特殊类型的空间（由于它们的特性得以应用发展较成熟的分析，即微积分方法与代数方法）的几何学以外，数学家又考虑了最一般的点的集体所构成的空间，研究它们的连续性质与度量性质，形成了所谓点集拓扑学与测度论这些分支学科。

## 数与形的联系

十七世纪是数学发展历史上一个划时代的新阶段的开始。这一时期，创立了解析几何，又出现了变量与函数的概念，把数学中的两大基本概念形与数紧密地联系在一起。所谓函数，即是定义在某些空间上的数量的分布。例如，在大气层中的压力、温度等等物理量的分布，即是定义在大气层空间上的压力函数、温度函数等等。十七世纪通过用微分表达变化，与用积分表达积累，又创立了研究函数的变化与积累的微积分方法，使数学得到了一个认识自然的有力武器，面目为之一新。自然界的规律往往表现为某些物理量之间的变化与积累的相互制约关系，在数学形式上，则表现为定义在某些空间上的函数间的微分积分方程。举例来说，所谓气象预报，无非是根据过去一段时期，对各地压力、温度、降雨量等等的实测数据，以及表达气象变化规律的这些函数间的微分方程，用数学方法推算出

今后一段时期内的这些函数数值，以预报气象特征而已。这种帮助认识自然，进而改造自然的普遍而有力的数学方法，使相应的一些数学分支，如函数论、微分方程、数学分析等成为三百多年来数学发展的主流，构成了庞大的分析一类数学，并由于要解决有关问题，而促使一些新的数学分支，如微分几何学、拓扑学、泛函分析、计算数学等的出现与迅速成长。

形与数这两者并不是互相割裂的，早在产生数学的萌芽时期，就通过长度、面积与体积的量度而把形与数联系了起来。我国宋元时期更系统地引进了几何代数化的方法，把一些几何特征用代数式来表达，几何关系则表达为代数式间的代数关系，成为解析几何的先驱，使空间形式的研究归结为较成熟也容易驾驭得多的数量关系的研究。在近代的数学中，这个方法原则也一直在使用着。例如，在拓扑学中，通过引进一些数（如贝蒂数）或代数系统（如同调群，同伦群等）来表达拓扑空间的连续性与连通性，然后用代数方法对这些数与代数系统进行分析而获得拓扑空间几何性质方面的信息。依据这种思想，在十九世纪末开始建立起来的代数拓扑学，成为拓扑学中最有活力的分支，在本世纪中有着极大的发展，对整个数学也有不小的影响。

不仅几何学由于代数化而获得了有力的武器，而且代数学（以及分析学）也往往由于借用了几何术语，运用几何类比而得到了新的生命力，促进了它们的发展。例如，早在十八世纪中，法国数学家拉格朗日就把时间因素作为与三个空间坐标并列的第四个坐标而引入了四维空间，推动了力学的研究。同样，力学家与物理学家往往把各种物理参数作为不同坐标而引进了高维的相空间等概念，使几何方法得以在物理学中发挥作用。现

代的相对论，即在这种方法下与四维时空流形的几何学研究不可分离。现代数学中还有一个常用的方法，即把一个个函数看作一个个“点”,而把某类函数的全体看作一个“空间”,函数间的相异程度看作“点”之间的“距离”,由此得到了各种无穷维的函数空间。一个微分积分方程组的求解，往往归结为求相应函数空间中一个几何变换的不动点问题。这样，不仅分析的问题具有了几何“直观”的意义，而且可以运用近代几何拓扑，以至抽象代数学的有力方法。由此在分析类数学中产生了泛函分析这一活跃的分支，在现代自然科学甚至工程技术的应用中起着极其重要的作用。

## 数学发展中的边缘学科

几何、代数与分析等类的学科构成了数学的本体与核心。随着数学本身的发展，以及科学技术与生产实践对数学的新的要求，在这一核心的周围又形成了许多外围学科与边缘学科。例如，客观世界中大量存在的随机现象的研究自十八世纪以至近代逐渐形成了概率论、随机过程论与数理统计等随机类学科。近几十年来，由于现代生产与国防建设的需要，对资源、设备和条件的合理使用与统筹规划，形成了优选学、规划论、对策论、排队论等运筹类学科。现代大工业要求对工程系统的操作能更可靠与更经济，并能自动控制，特别是由于航天技术等，对控制系统高精度的要求，出现了一门介于数学和工程之间的边缘学科控制论。工程乃至生物中各种复杂的信息传递的研究，推动了边缘学科信息论的诞生和发展。大量应用数学问题的解决，最终需要取得有一定精确度的数据而出现了各种具体的计算理论与计算方法，由此促进了计算数学的发展并产生了一

门数学——计算机科学的边缘学科。数学与各种科学的相互渗透又出现了物理数学、生物数学与经济数学等交叉学科。此外，数学各基础学科间的相互渗透也在数学核心内部产生了各种综合性学科。例如，流形上几何、拓扑与微分方程的综合研究，形成了一门新的分支“大范围分析”，随机函数的微分方程论研究，又产生了概率论与分析学的综合性学科“随机微分方程论。”象这一类的综合性学科正在不断涌现。

另一面，十七世纪以来由于解析几何与微积分这种强有力的新工具的出现，数学家们忙于应用这些工具解决科学与技术中的一大堆问题，并为新方法的成功所陶醉，对于所依据的理论是否可靠，基础是否扎实，未遑遐顾。到了十九世纪，数学家们已越来越感到谬误与正确杂陈的局面之无法容忍，许多概念必须澄清，数学也必须置于严密基础之上。在这种形势下，从十九世纪中叶以来，主要在一些德国数学家的倡导之下，对数学进行了一场批判性的检查运动。这场运动不仅使数学奠定了严实的基础，并产生了公理化方法，以及一些集合论、实变函数论、点集拓扑学、抽象代数学等新颖学科。特别是，数学推理本身的分析与形式化产生了一门影响巨大的学科“数理逻辑”。

此外，数学史料的征集与整理也被重视起来，出现了一些篇幅巨大的数学史著作。近年来，数学史已进入了对数学思想与方法的历史演变和分析批判的研究阶段。对中国古代的数学过去或付阙如、或多歪曲的情况，也已受到了重视，开始走上了正确理解与分析的时期。我国的数学工作者们，应该责无旁贷，把对我国数学史的研究重任担当起来。

这样，以几何、代数、分析等类学科为核心，以及围绕此

核心周围的形形色色的许多学科错综复杂地交织在一起成为数学王国的一幅宏大而绚丽的蓝图。

## 数学学科的盛衰兴替

当然，学科并不是一成不变的。随着时间的推移，新的学科不断产生，旧的学科却有时不免销声匿迹默默无闻。绵亘于整个十九世纪的投影几何学，由于基本上已搞清楚而被作为档案搁置在图书馆的书架上。在本世纪二十年代盛极一时的射影微分几何学，则由于后来发现意义不如预期而受到了冷落。在十九世纪对代数与几何都极重要的不变式论这一学科，则其盛衰兴替已有几起几落。某些学科，如代数几何学，其面貌又经常在改变之中，诸家学说纷纭，从未获得定型。另一面，某些十八、十九世纪，甚至更悠久且已消逝的理论，却又重新被发掘出来，在新的观点、新的方法之下，成为现代数学中很活跃的研究课题。例如，一门作为微积分最早应用的古老学科“变分法”，本来消沉已久，近一、二十年来，却以另一种控制论的新面目，出现在技术领域中显得十分活跃。这两三百年来的不少经典著作，也被重新翻印和钻研之中。

然而，不管数学各个学科经历着怎样的分、合、改、变，也不管数学内部如何奔腾澎湃，数学王国的疆土总是在不断扩张之中，而且始终是由形与数两大基本概念所统治之下的“世袭”领土。伟大的革命导师恩格斯对数学所作出的“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”的这一精辟刻划不仅是对数学过去的总结，也是对数学现状的忠实描绘，又是对数学未来发展的指导与准绳。

## 二、数学发展的未来

展望未来，数学科学丰富多彩的广阔天地之日新月异，似乎使数学不得不分成许多日益庞杂的分支，各分支间的联系，也有日益削弱的趋势。许多专门家们往往只能偏处一隅之地，彼此很难相互了解。然而这只是数学发展过程中的现象，也只是事物的一个方面，随着数学的不断前进，也必然会不断出现更锐利的工具与更简单的方法，使数学不断更新，删繁就简，去粗存精。在历史上，原来只能用天才式的艰难推理才能从事的初等几何学，通过我国宋元时代的几何代数化，与十七世纪时的解析几何，已变得平淡无奇。从有史以来直到十七世纪包括解析几何与微积分为止的全部数学，不论岁月如何漫长，卷帙如何浩繁，内容如何丰富，基本上都已（或应已）压缩在十来年的中小学教科书中。这种现象也正在重复。

为了要使庞大的数学知识变得简而且精，数学家们经常依据数学各领域间潜在的共性，提出统一数学各部分的新观点新方法来。例如，在十九世纪后期，德国厄兰格的数学家克来因提出用“群”的观点来统一当时杂乱的各种几何学的方案，迄今称为厄兰格计划。本世纪二十年代，美国伯克霍夫又提出了“格”的概念，以统一代数系统的各种理论与方法。上一世纪与本世纪之交，出现了公理化运动，以公理系统作为数学统一的基础。本世纪三十年代，法国的一个数学学派布尔巴基，除了继承了公理化运动以外，又提出了结构概念，把数学的核心部分在这概念之下统一成一个整体，而依研究结构的异同来划分成不同领域。与此大约同时，美国麦克莱恩与艾伦伯格又提出

范畴与函子理论，数学的分门别类即以研究所属范畴为依据，以此作为统一数学的基础。总之，各种不同学派，根据他们对数学的不同认识，提出了多种多样统一数学，以建立数学体系的不同方案来，其终极目的则大体上是相同的。或许将来会出现一种新观点、新方法、新理论，把目前的数学统一起来。但是，这种统一不是绝对的、静止不变的，而是暂时的、相对的，对立的斗争则是绝对的。随着科学技术的不断发展和深入，以及各学科之间的相互渗透，将对数学提出大量的千差万异的新课题，使数学研究得更深入。这些问题的解决，反过来又促使数学更进一步发展。

对于数学未来发展具有决定性影响的一个不可估量的方面是计算机对数学带来的冲击。在不久的将来，电子计算机之于数学家，势将与显微镜之于生物学家，望远镜之于天文学家那样不可或缺。现在的计算机通过小型化而成为每个数学家的“囊中之物”，这一设想势将成为现实，数学家们对这些前景必须有着足够的思想准备。

除了一些人所共知的作用外，计算机还提供了一个有力工具使数学有可能象其它自然科学一样，挤身于科学实验的行列。十九世纪的数学家高斯，为了要发现整数性质的规律性，首先对各种特殊情况做大量艰苦的计算工作以为试探。高斯关于整数论的一些著名定理，用他自己的话来说，就是通过这种“系统尝试法”而发现的。现在这种手工业式的系统尝试可以用电子计算机来代替了。美国数学家乌拉，为了要探讨应用中广泛出现，而现代数学又显得还无能为力的非线性现象，在电子计算机上进行试验，发现了一些规律，近几年来，在应用数学上的一个重大突破（所谓微分方程孤立子解的获得），就是首先

在计算机的荧光屏上发现的。

计算机对数学的另一个重大作用乃是对数学研究作为脑力劳动在方式上带来的革新。数学，不论是学习还是创新，最耗时费力的劳动，往往消耗在定理的证明上，而不是在真理的发明、发现上。事实上，一个定理即使对其证明在逻辑上经历了严格细致的逐步检验也无非是说明知道定理正确无误而已，还不足说明真正“懂得”了这个定理。自然，证明是完全必要的，证明的严密性也是完全必需的，但更重要的应是定理之为何发明，如何发明，起何作用等这一类问题。电子计算机已使人们从烦琐复杂而又十分单调的加减乘除的劳动中解放出来。某些数学定理的证明，完全可以借助于电子计算机来完成。事实上，某些或某类定理的证明，可以避免通常虽简美但奥秘因而颇为艰难的方式，而采用虽烦琐但刻板因而较为容易的方式。换言之，即使质的困难转化成量的复杂，而后者对于电子计算机来说是轻而易举的，因而得以使定理证明化难为易。这样电子计算机就可以使人们从某些逻辑推理的脑力劳动中解放出来。因而使数学家得以把聪明才智更多地用到真正创造性的工作上去。这是当前数学发展中值得也是应该认真考虑的问题。

我国的数学有着悠久的历史与优良的传统，本来位于世界的先列，只是近几百年来才落后了。

解放以后，我国数学的发展曾呈现一片兴旺景象，出现了与国际先进水平的差距越来越小的势头。但近几年来，由于“四人帮”的严重干扰和破坏，使我国数学的发展大大落后于形势的需要。

在党中央向科学技术现代化进军的伟大号召下，我国应急起直追，不仅赶而且超，在本世纪余下的二十三年内，我国的

数学工作者，不仅应在数学上有所创造，有所发明，有所前进，以丰富数学的内容，拓展数学的领土，增强数学的基础研究，扩大数学的应用，而且应以马列主义、毛泽东思想为指导，以数学的渊博知识与深湛认识为基础，提出我们自己的观点与方法，建立几个具有我国特色的学派，涌现出一批在国际上有影响的数学家，为独立自主地解决社会主义建设中提出的数学问题，为四个现代化作出较大的贡献。这将是我国老、中、青数学家们所面临的一项十分艰巨而又十分光荣的历史任务。

# 关于教材的一点看法

为了提高整个中华民族的科学文化水平，加速实现四个现代化的步伐，必须大幅度提高基础教育的质量。因此，把较高的基础知识有条件地适当地纳入较低的基础教材之内，已是一项提到教材改革日程上来的问题。不弃旧无以纳新，为了安排较新较高级的内容，某些陈旧的内容必须有所压缩，甚至从原来教材中淘汰出去，这也是无可非议的事。

这种教材上的弃旧纳新，在历史上并不是什么新鲜事。远的不谈，只就近几十年来的情况看，也可证明这一点。举几个例子：解放前的数学教材，初中一年级整整一年学的是算术，主要内容是鸡兔同笼一类的四则难题，解放后很早就一笔勾销，初中一年级就学代数。解放前的初等几何，往往在九点圆一类的难题，趣题上消耗不少精力，解放后也早已在课程中排除，让位于解析几何。这些改革，现在大家都承认是必要措施，很少人会提出异议了，但在当时决不是顺顺当当的。

究竟纳什么新弃什么旧，纳又纳到什么程度，弃又弃到什么程度，则应根据具体情况作具体分析，郑重从事。相信教育界和数学界的同志，本着对我国人民与我国科学事业的负责精神，会各抒所见，提出切实可行合于实际的良好意见来。在这里，我愿抛砖引玉，说点自己的意见。我个人认为，初等微积分应该处于最优先考虑的地位，它的意义作用比之所谓集合矩阵之类重要得多，而且学起来对中学生并无多大困难。其次，

还可考虑增加一些有关计算器使用的项目，这在国外的教学改革中，也已经成为不少中学新教材的必修内容了。

上面的意见，是对于较长期的改革来说的。在短期内，我们也不能不顾及某些现实情况。由于“四人帮”对教育的摧残和破坏，这些年来中学数学水平大大降低。对于正在中学就学的同学们来说，当务之急，还在于加强计算能力与逻辑推理等的基础训练，努力提高数学质量。宁可少些，但要好些。自然，长期与近期措施之间，并不是截然分开，而是可以并行不悖的。

数学教材一方面应有弃旧纳新的准备，另一方面也应注意必要的相对稳定性。科学发展日新月异，数学的创新也层出不穷。但教材毕竟与科学的创新不同。如果一味求新，而那些新的内容是不是能经得起时间的考验，往往很难预测。改得不好，会造成灾难。我们只能将已经历过较长时间的考验，并肯定有广泛应用前途的内容纳入新教材，而不能凭主观冒失从事，违背最起码的认识规律。例如，我们不能让学生在没有经过具体数字运算的基本训练的情况下，就来学习以文字代替数字的初等代数或使用计算器。同样，不能在还没有掌握直线与圆的基础知识之前，就学习几何的代数化与解析几何。这些道理，本来不言而明，但国外某些数学教学改革却曾因违背这些常理而招致灾难性的后果，不能不引以为戒。

# 数学与四个现代化

敬爱的周总理曾经指出：实现四个现代化的关键在于实现科学技术现代化。而科学技术的现代化，处处离不开数学。数学可以说是基础科学中的基础学科，也可以说是科学现代化的基础。

革命导师马克思和恩格斯都十分重视数学。马克思指出：一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。他自己还写出了精辟的微积分的论文。恩格斯在他写的《自然辩证法》和《反杜林论》中，对数学产生的历史，发展的动力，以及应用与作用，都有非常精辟的论述。他还给数学下了一个最恰当的最有概括性的定义。他说："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量的关系，所以是非常现实的材料。"这个定义不但总结了数学的过去，描述了数学的现状，还指出了数学今后的发展方向。

恩格斯下的定义，指出了数和形是数学中的两大基本概念。事实上，整个数学就是围绕这两大基本概念的演变而发展的，同时也通过这两大基本概念应用到各个不同的领域中去。例如造房子，要进行各种力学和材料的计算，这就离不了数；还要画出设计图纸，这就离不了形。所以在各种科学研究、生产建设和日常生活中，数学都是不可缺少的武器。

在小学和中学的数学课本里，我们接触到了整数、小数、

分数、正数和负数、实数和虚数，以及它们之间的各种运算，如加、减、乘、除、开方等等，这些构成了以数量为主的算术和代数部门；我们又接触到了点、线、方、圆之类的图形，以及它们的性质和相互关系，如面积、体积、全等、相似等等，这些构成了以空间形式为主的几何部分。我们还要接触到表示几个数量之间相互制约的关系，就是函数概念，以及它们的图形所表示的变量、极限和座标等等，这就进入了把数和形这两大基本概念沟通起来的解析几何和初步微积分的领域。我们还要接触到这些基础知识在各种实际运用中的具体问题。上面讲的，就是小学和中学数学课本的大致轮廓。

小学和中学数学课本的全部内容，都是人类在漫长的岁月中积累下来的数学知识的精华。在探索这些知识时，不少人付出了艰苦的劳动，后来一再加工提炼，才使这些知识变得简单易懂。譬如说负数的概念，现在大家都很容易理解。但是在十六世纪，欧洲最博学的数学家也感到难以理解，甚至把负数叫做“虚构的数”，“荒谬的数。”直到十八世纪，英国的一些大学还反对使用负数。而在我国，古代的数学是十分先进的。有一部数学经典著作，叫《九章算术》，是在两千年以前西汉初年写成的。里面有一章《方程》，记载了十八个联立方程组的问题，未知数从两个到五个，在解这些问题的时候已经运用了正数和负数。我国古代的这个辉煌成就，说明了我国人民不但有高度的分析问题和解决问题的能力，还有高度的抽象能力，善于以广泛的实践为基础，提炼出有普遍意义的概念。

我国古代在数学方面的许多成就，经历了长期的历史考验，直到今天还有现实意义。例如在多种多样的实际应用中要解决的联立方程组，未知数不是三个五个，而是几十个几百个。解

这样繁复的联立方程组，用笔算是无论如何办不到的。在电子计算机出现后不久，一位专家曾经估计：一个有二十六个未知数的联立方程组，在电子计算机上用十八世纪在欧洲出现的“克莱默方法”来解，得花十万万万万年；如果用消去法来解，只要用三秒钟就够了。这种消去法，我们在中学的代数课本上就可以学到，也是我国两千年前创造的方法，也载在《九章算术》上。

我国古代在数学方面，创造了丰富多采的理论和方法，为人类作出了很大的贡献。但是由于长时期的封建统治和近一百多年来的帝国主义侵略，生产得不到发展，数学的发展也停滞了。而欧洲，由于文艺复兴和工业革命，资本主义制度取代了封建制度，解放了生产力，打开了数学发展的新局面，出现了解析几何、微积分以及内容丰富的现代数学。这些现代数学知识，都是我们实现四个现代化所必不可少的。举例来说，搞工业总要遇到如何能多快好省的问题。最简单的这一类问题可以归结成这样的形式：求一个函数的极大值或极小值。有了微积分的知识，这一类问题的解决就变得轻而易举了。现代的大工业中，还出现了许多新的求极大值和极小值的问题：有的函数关系根本不知道，有的虽然知道了函数关系，但是变数受着一些不等式的限制。解决这样的问题，微积分也无能为力，数学家们就创造了一些新的理论和方法，解决前一类问题的有优选法，解决后一类问题的有规划论。

不但工业要用到数学，农业机械化和国防现代化也都要用到高深的数学。农业现代化首先要实现机械化，在农业机械的制造中，就有大量的数学问题。例如拖拉机上一个小小的犁铧，犁面做成什么形状，翻土的作用才能起得好，用到的数学就不

简单。国防现代化要设计新武器，要提高作战能力，如导弹形体的设计，要考虑到振动不致影响方向的问题。在指挥空战中，要考虑到敌机如何逃避和我机如何追逐的所谓追逃问题。所有的问题都要用高深的数学知识来解决。科学技术的现代化，遇到的数学问题就更多了。毛主席有过重要指示，要进行基本粒子的研究。这是目前世界上最活跃的一门科学，几乎所有的数学工具都运用上了。数学作为一种应用的武器，可以说无孔不入。四个现代化如果离开了数学，将寸步难行。

# 消除对数学的神秘感

## ——推荐《数学译林》

一个人从小学、中学到大学，在各项课程中，投入时间最多的，无过于数学。一个人涉猎群书，在各种读物中，最感到费解的，也无过于数学。数学的各种书刊，不仅对于非数学家是一种禁区，即使是数学家，从事数学这一领域研究的专家要阅读另一领域的著作，对于其中出现的许多概念符号（更不用说推理论证），也往往会感到玄妙莫测，必须花费很大的气力才能得到一个大致的印象与了解。

如何填平数学与非数学之间的鸿沟，消除非数学家对数学的神秘莫测感？如何消除数学各个不同领域专家之间的隔阂，使他们不致隔行如隔山，以增进彼此间的了解并进而交流合作？这都是值得重视的问题。

《数学译林》这一刊物，不同于一般的数学刊物，它多少有助于弥补上面所说的那一些缺陷。

《数学译林》是以译文为主的综合性数学刊物，其目的在于介绍国外数学的进展，普及现代数学知识，由此促进我国数学事业的发展与水平的提高。

《数学译林》辟有各项专栏。综合报告与专题介绍专栏就对某一领域或某一专题的历史与现状作较全面较通俗的论述，使非本专业的人能迅速获得对它的了解，甚至被吸引到这一方面

来参加工作。

数学史与人物传记专栏评介数学发展中出现的重要事件与著名学者的重大贡献，从历史名人到当代标新立异的数学家，从个别人物到影响巨大的大学派，巨细不捐。

数学争鸣栏介绍数学上的重大争论，例如对纯粹数学与应用数学以及数学的作用等的许多不同看法。英国某数学权威推崇“无用”的数学为至高无上的数学的著名论点，以及另一有名学者对它的反驳，就登载在同一期中。

此外，如数学小品、数学教育、数学竞赛等栏也都各有特色。

尤其值得一提的是，在文章末尾空白之处，往往摘引了一些有名人物的名言警句，足以发人深省。

自然，数学究竟与其他科学不完全一样，即使是一篇通俗著作，牵涉到一些专门的论述时也会使读者感到困难，但这决不是主流。不论是专业性的数学专家，或是只对数学抱有兴趣的门外汉，都有可能从刊物中找到一些能使他们满足的作品。总的说来，这一刊物大体上能做到雅俗共赏。我自己可以说既是数学中的雅士，也是数学上的俗客，不论从哪一角度，都是这一刊物的爱好者与经常阅读者。为此特将这一刊物推荐给广大读者。

# 数 学 专 论

# 《可剖形在欧氏空间中的实现问题》的绪论

## 一、实现或嵌入问题

依照 F. Klein 的经典的理论，几何学研究某种类型图象的某种类型的性质，而且也正由于所考虑的图象与性质各不相同，相应地形成了种种不同的几何学分支。如果细加分析，那么各种几何图象，尽管来源有别，归根到底往往归结为位于某一欧氏空间中的“具体”的图象，这个欧氏空间可以是有限维的，也可以是无限维的，即 Hilbert 空间。另一方面，为了要研究这些图象的内在的特性，也就是属于图象本身而与所在空间无关的那种特性，就有必要从一开始就以抽象而独立的形式来加以定义，例如从 Cantor 关于欧氏空间中点集的研究逐渐发展成的拓扑空间的概念，以及根据欧氏空间中光滑曲线、曲面等引伸而成的 Riemann 流形或微分流形的概念等。一个自然引起的问题是：如何能把“抽象”概念与“具体”事物恒同起来。这样一个问题的正面的答案我们称之为“实现”定理或“嵌入”定理，许多几何学中的基本定理正是属于这样一种性质。仅从拓扑学方面来说，就可以提到下面两个例子：

1. Urysohn 定理：Hilbert 空间中的子空间，即正则而有可数基的那种拓扑空间。

2. Menger–Nöbeling 定理：欧氏空间中的闭闽集，即维数有限、有可数基而紧致的那种拓扑空间。

这些定理给与了某种类型的图象以一个总的概括。所谓空间的正则性、紧致性等等本来是对于欧氏空间中图象观察分析而抽象出来的，上面的两条定理说明，在某种类型图象所具有的无数的拓扑性质里面，这些性质是具有代表意义的，因此它们在拓扑中占据着重要地位乃是当然的。

对于这一类问题，我们还可进一步考虑，在一特定维数的欧氏空间中所能容纳的图象，例如平面中所有可能的线性图，三维空间中所有可能的 Riemann 曲面等问题。就拓扑学而论，我们将探讨以下问题。

**问题Ⅰ（空间的拓扑实现）** 一个拓扑空间可实现为$N$维欧氏空间中的拓扑子空间的条件为何？

**问题Ⅱ（复形的半线性实现）** 一个复形具有剖分可实现为一$N$维欧氏空间中的欧氏复形的条件为何？

**问题Ⅲ（微分流形的微分实现）** 一个微分流形可实现为一$N$维欧氏空间中的光滑流形的条件为何？

这样的问题要求完全解决，自然希望是极少的。如果与 Riemann 流形在$N$维欧氏空间中的实现问题相比较，后者自 E. Cartan 以来即使在“局部实现”问题上成果也不多，由此就可以想到前述问题的困难程度如何，事实上，我们的工作也只限于提供一些方法，对上述问题Ⅰ—Ⅲ（主要是问题Ⅱ）求得部分成果而已。

这就是本书的目的。

## 二、已知的成果及其分析

在文献中曾经出现过研讨问题Ⅰ—Ⅲ的几种比较一般的方

法，它们对于在$N$维欧氏空间中实现的可能性问题都曾提供了重要的知识，以下我们将逐一叙述这些方法中的三个方法。

方法 I　假设一个紧致空间$X$已实现为一$N$维欧氏空间$R^N$中的子空间，那么考虑$R^N-X$与$X$的性质间的关系，即将给出$X$可实现于这样一个$R^N$中的某些条件。这一方法可以追溯到 Alexander 的早期工作，例如，由 Alexander 对偶定理可知在整系数或 mod2Betti 数间有以下关系：$p^i(R^N-X)=p^{N-i-1}(X)$，$i\neq 0$，$p^0(R^N-X)=p^{N-1}(X)+1$。由此即得$p^N(X)=p^{-1}(R^N-X)=0$，而这给出了$X$可实现于$R^N$中的一个必要条件，特别是一个$n$维闭流形不能在$R^n$中实现。Hantzsche 应用了同样的方法，研究了当一个$n$维闭流形$X$实现于$R^{n+1}$中时，在$X$与$R^{n+1}-X$的下同调群之间的对偶关系，由此推得了$X$可实现于$R^{n+1}$中时用 Betti 数与挠系数来表达的一些必要条件。同样，在$X$是$n$维投影空间时，Hopf 通过对于$X$与$R^{n+1}-X$间同调环的对偶关系以证明了一个$n$维投影空间不能在$R^{n+1}$中实现这一定理。与 Hopf 同样的想法使 Thom 获得了更一般的结果：一个$n$维闭流形$X$实现于$R^{n+1}$中时用$X$的同调环表达的某些必要条件。近年来 Peterson 研究了$X$与$R^N-X$（或更正确些说$S^N-X$，这里$S^N$是假定$X$已在其中实现的一个$n$维球）间同调运算的关系，由此而获得若干有趣的实现定理。

方法 II　假设$X$已实现于$R^N$中，与第 I 方法有所不同，我们可以不考虑$X$与其余集$R^N-X$的性质间的关系，而考虑$X$与它在$R^N$中的邻域的性质之间的关系，这个方法似乎是首先由 Whitney 用之于微分流形在欧氏空间中的微分实现这一问题上的。依据这种思考 Whitney 又创立了球纤维丛理论并引入

了微分流形$M$的所谓Stiefel-Whitney 示性类$W^i\in H^i(M,\mathrm{mod}\ 2)$,以及对偶 Whitney 示性类 $\overline{W}^i\in H^i(M,\ \mathrm{mod}\ 2)$,这些类在拓扑学以及微分几何中都起了重要的作用。就仅与实现问题有关者而论,我们暂时可以提到下面已成经典的 Whitney 定理。

**定理 1** (Whitney) 一个$n$维微分流形 $M^n$ 若能微分实现于一$N$维欧氏空间中，则必须有

$$\overline{W}^k(M^n)=0,\quad k\geqslant N-n。\tag{1}$$

微分流形上 Stiefel-Whitney 示性类这一概念曾被 Pontrjagin 推广为更一般的示性类。其中除 Stiefel-Whitney 示性类外，最重要者为所谓 Pontrjagin 示性类 $P^{4k}\in H^{4k}(M)$ 与对偶 Pontrjagin 示性类$\overline{P}^{4k}\in H^{4k}(M)$。与上面的 Whitney 定理同样，我们也有下面的

**定理 2** 一个$n$维微分流形 $M^n$ 如果能微分实现于一$N$维欧氏空间$R^N$中，必须有

$$\overline{P}^{4k}(M^n)=0,\quad 2k>N-n。\tag{2}$$

Thom 依据了同一原则但应用拓扑空间的拓扑实现,研究了实现于$R^N$中的空间$X$的 Steenrod 平方运算以及它在 $R^N$ 中邻域的 Steenrod 平方运算间的关系，获得了下面的

**定理 3** 一个局部可缩紧 Hausdorff 空间$X$如果可在 $R^N$ 中拓扑实现，必须有

$$Sm^iH^r(X,\ \mathrm{mod}\ 2)=0,\quad 2i+r\geqslant N,\tag{3}$$

这里

$$Sm^i{:}\ H^r\ (X,\ \mathrm{mod}\ 2)\to H^{r+i}\ (X,\ \mathrm{mod}\ 2)$$

是由 Steenrod 平方运算从下关系所确定的某种同态：

$$\sum_{i+j=k}Sm^iSq^j=\begin{cases}0, & k>0\text{时},\\ \text{恒同同态}, & k=0\text{时}。\end{cases}\tag{4}$$

同一原则还曾被不少学者用以研究微分流形的微分实现问题，例如 Massey 研究了流形实现于欧氏空间中时它的“管形”的上同调环，*Atiyah* 则把这一管形作为所谓流形的 Grothenthick 环的一个元素来研究它，等等，似乎循着这一方向还有着广阔的前景。

方法Ⅱ 在 1932 年时 Van Kampen 发表了一篇非常有趣的论文，其内容是关于复形在欧氏空间中的半线性实现，而所用方法的原则则与前二者完全不同。由于它的重要性我们将在以下作较详细的描述。

很早以前就已经知道，一个 $n$ 维单纯复形 $K^n$ 必可在一 $2n+1$ 维欧氏空间中线性实现，Van Kampen 进一步探讨了 $K^n$ 在 $2n$ 维欧氏空间 $R^{2n}$ 中线性实现的问题并依下面的想法来进行：

设想把一个 $n$ 维有限单纯复形 $K^n$ “尽量可能”地线性实现于 $R^{2n}$ 中，一般说来，我们自然不可能期望得到一个真正的实现，但将得到一个几乎近似于真正的实现。换言之，只有有限多个“奇点”的近似真正实现，这些奇点乃是 $K^n$ 中两个本不相遇的 $n$ 维单形放入 $R^{2n}$ 中后可能有的交点。现在的问题是：(i)从这些奇点的探讨是否可以导出一些只与 $K^n$ 有关但与方法无关的不变量？(ii)有什么方法以及在什么条件之下可以除去这些奇点以得到一个真正的（半线性）实现？

为此设 $K^n$ 中的 $k$ 维单形为 $S_i^k$。$K^n$ 中两个没有公共顶点的单形将称为是分离的。命 $A$ 为所有无序指数偶 $(i, j)$ 的集合。对应于分离的 $n$ 维单形 $S_i^n$ 与 $S_j^n$ 所成的偶，作一整数环上的向量空间 $L$，其维数恰为 $A$ 中元素的个数。于是 $L$ 中任一向量可表作一组整数 $(a_{ij})$，这里 $(i, j)\epsilon A$。对

$K^n$中每一对分离的单形$S_a^{n-1}$与$S_l^n$可作一$L$中的向量$V_{la}=(a_{ij})$如下：如果$i$，$j$都$\neq l$，或其中之一，例如$j=l$，但$S_a^{n-1}$非$S_i^n$的面时，即置$a_{ij}=0$，否则置$a_{il}=\pm 1$（符号适当地选取）。如果$p-p'$是上面这种向量$V_{la}$间的一个整系数线性组合，则$L$中的两个向量$p$、$p'$将称为等价的。于是$L$中的向量分成了若干等价类，任一$K^n$到$R^{2n}$中依前面所说的那种近似真正实现，将确定一$L$中的向量$p=(a_{ij})$，其中$a_{ij}$为$S_i^n$与$S_j^n$在确定定向$R^{2n}$中的交截数。*Van Kampen*的工作指出，不论$K^n$到$R^{2n}$中的近似真正实现如何，相应向量$p$的等价类总是相同的，因之是复形$K^n$的一个不变量，而这给出了上面问题（I）的一个答案，记此不变量为$V(K^n)$，则显然有下面的定理。

**定理4**（Van Kampen） 一个$n$维有限单纯复形$K^n$如能在$R^{2n}$中线性实现（或甚至半线性实现），必须有

$$V(K^n)=0 \tag{5}$$

（即等价类$V(K^n)$含有$L$中的0向量）。

由$V(K^n)$的定义可见由一$K^n$到$R^{2n}$中的近似真正实现$f$所确定的向量$p$，可以视为是$f$成为一个真正实现的某种“阻碍”，它体现了$f$与一真正实现之间差距的某种度量，因此自然地引起这样的猜测，即$V(K^n)$之为0将使奇点的除去成为可能，以致条件(5)不仅是$K^n$可线性或半线性地实现于$R^{2n}$中的必要条件，同时也是充分条件，在$n>2$时，Van Kampen也曾发表了这样的一个证明，但其中一个根本性的错误使这一证明本身不能成立，这一问题因之虚悬直至晚近始获解决，这在下面还将论及。

如果Van Kampen只考虑了复形在欧氏空间中的线性或

半线性实现的问题，那么 Whitney 与 Pontrjagin 在考虑微分流形在欧氏空间中的微分实现问题时，也使用了与之有某种类似的“阻碍”方法。例如，早在 1936 年时，Whitney 就证明了一个 $n$ 维微分流形 $M^n$ 必可微分实现于一 $2n+1$ 维欧氏空间中。如果我们尝试把 $M^n$ 尽可能地微分实现于某一 $N$ 维欧氏空间中，而 $N \leq 2n$ 时，一般说来将出现一些奇点，而象 Pontrjagin 所证明的那样，这些奇点将负载某些下闭链，它们的对偶上同调类将与合理地选择的近似真正实现无关而为流形不变量，在后来被称为流形的示性类，它们包括了在方法 I 中已经提到过的 Stiefel-Whitney 示性类与 Pontrjagin 示性类。从这一点也可得出定理 1 与 2 来。再者，在 $N=2n$ 时，$M^n$ 到 $R^{2n}$ 中一个合理的近似真正实现将只有一些孤立的奇点，而除去这些奇点的一些方法使 Whitney 获得下面的且同样已成为经典的定理。

**定理 5 (Whitney)** 任一 $n$ 维微分流形必可微分实现于 $R^{2n}$ 中。

象由 Shapiro 与作者所指出的那样，在 $n>2$ 时这一 Whitney 的方法也可用在某些情况下移去一个 $n$ 维复形到 $R^{2n}$ 中一近似真正半线性实现中所出现的奇点，而这恰好弥补了 Van Kampen 原证中的缺陷，从而回答了在上述情形下的问题 (I)：

**定理 6 (Van Kampen-Shapiro-吴文俊)** 一个维数 $n>2$ 的有限单纯复形 $K^n$ 如果有

$$V(K^n)=0,$$

则必可半线性地实现于 $R^{2n}$ 中。

应该提到，象上面所描述的由 Van Kampen 与 Whitney

所建立的基本想法，已被 Haefliger 用之于微分流形微分实现问题上而且推广甚远，Haefliger 有关流形的这一理论，在什么程度上可以推广到可剖形或复形的实现问题上，乃是一个极有意义的课题。

## 三、本书中的方法

本书中用以处理实现问题的方法，奠基于下面简单的观察，一个空间 $X$ 到另一空间 $Y$ 中的（拓扑）实现，需要存在一个一对一的 $X$ 到 $Y$ 中的映象 $f$，以致 $f(X)$ 在 $f$ 下与 $X$ 拓扑等价，这样一个实现映象 $f$，因之是一个“拓扑”的连续映象，其主要的特征之一是一对一的。因此所谓实现问题是一“拓扑性”的问题，而与流行于代数拓扑中大部分问题，主要是属于“同伦性”的问题有别。对后者，由于主要是“同伦性”的，故代数拓扑中的强有力的“同伦”方法，往往直接可以应用上去，而对前者则否。为了要克服这一潜在于实现问题中的困难，必须找到合适的方法把映象 $f$ 的一对一性显露出来，然后再使用通常的同伦方法。

为此我们引入了空间 $\tilde{X}^*$ 与 $X^*$，各由 $X$ 的所有有序与无序点偶 $(x_1, x_2)$ 与 $[x_1, x_2]=[x_2, x_1]$ 所组成，这里 $x_1$、$x_2 \in X$ 而 $x_1 \neq x_2$。试考虑从 $Y$ 依同样方式导出的空间 $\tilde{Y}^*$ 与 $Y^*$，于是一个实现映象 $f: X \to Y$ 将自然地引出实现映象 $\tilde{F}: \tilde{X}^* \to \tilde{Y}^*$ 与 $F: X^* \to Y^*$，这里 $\tilde{F}(x_1, x_2)=(f(x_1), f(x_2))$ 与 $F[x_1, x_2]=[f(x_1), f(x_2)]$。如果估计到映象 $f$ 的一对一性在定义 $\tilde{F}$ 与 $F$ 时即已用到，就不难引导到这样一个猜测：即使我们只考虑 $\tilde{F}$ 与 $F$ 的连续性，也要比只考虑 $f$ 的连续性者为多，而这

仅仅是“同伦”方法在 $\widetilde{F}$ 与 $F$ 上的应用，这就可给出 $X$ 到 $Y$ 中实现可能性的一些实质性的线索。不出所料，真正的情况确是这样。

事实上，试记 $\widetilde{X}^*$ 到 $X^*$ 以及 $\widetilde{Y}^*$ 到 $Y^*$ 的自然投影各为 $\pi_X$ 与 $\pi_Y$，则有以下作为连续映象的可交换图象，其中 $\widetilde{F}$ 与 $F$ 的一对一性我们已置诸不顾：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}^* & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \widetilde{Y}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \pi X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi Y} \\ X^* & \xrightarrow{F} & Y^* \end{array} \qquad (*)$$

现在的问题是：从这样一个可交换图象能得出些什么结论呢？

对于这样的问题是有现成的工具可用的。显然 $\widetilde{X}^*$ 是 $X^*$ 上的一个二叶覆迭空间，其覆迭变换是一在 $\widetilde{X}^*$ 中没有定点而周期等于 2 的拓扑变换，于是 P. A. Smith 的著名理论指出对这样一对空间 $(\widetilde{X}^*, X^*)$ 可配以一组上类 $A^m(\widetilde{X}^*, X^*) \epsilon H^m(X^*, I_{(m)})$，$m \geqslant 0$，这里 $I_{(m)}$ 等于整数群或模 2 整数加法群，视 $m$ 为偶数或奇数而定。由于 $\widetilde{X}^*$、$X^*$ 与 $\pi_X$ 都完全依赖于空间 $X$，故这些类 $A^m(\widetilde{X}^*, X^*)$ 实际上是 $X$ 自身的拓扑不变量而可合理地使用下面的记号

$$\Phi^m(X) = A^m(\widetilde{X}^*, X^*) \epsilon H^m(X^*, I_{(m)})。$$

容易证明 $\Phi^m(X) = 0$ 将蕴含不论 $i \geqslant 0$ 如何都有 $\Phi^{m+i}(X) = 0$，因之可引进一整数 $I(X)$ 或 $+\infty$ 使其为使 $\Phi^n(X) = 0$ 的最小整数。同样对 $Y$ 也可定义 $\Phi^m(Y)$ 与 $I(Y)$，于是依 P. A. Smith 的理论从可交换图象 (*) 可得

$$F^*\Phi^m(Y) = \Phi^m(X)。$$

由此即得

**定理1** 一个空间$X$如果能拓扑实现于一空间$Y$中，则必须有

$$I(X) \leqslant I(Y)。$$

特别在$Y$等于一$N$维欧氏空间$R^N$时，可证$I(R^N)=N-1$。因之有以下定理作为推论。

**定理2** 一个空间$X$如果可在$N$维欧氏空间$R^N$中拓扑实现，则必须有

$$I(X) \leqslant N-1,$$

或即

$$\Phi^N(X)=0。$$

这两定理虽然是P. A. Smith理论的直接推论，却是我们整个理论的核心。值得注意的是，这些定理，尽管如此不足道，却还包含了象§2所叙述的Whitney、Thom、Van Kampen等人的主要结果作为它们的特款。更精确言之，我们有以下诸定理（$\rho_2$表模2约化）。

**定理3** 如果$X$是一局部可缩的紧Hausdorff空间，且有$\rho_2\Phi^N(X)=0$，则有

$$Sm^iH^r(X, \mathrm{mod}\,2)=0, \quad 2i+r \geqslant N。$$

**定理4** 如果$M^n$是一$n$维微分流形，且有$\rho_2\Phi^N(M^n)=0$，则

$$\overline{W}^k(M^n)=0, \quad k \geqslant N-n\text{时}。$$

**定理5** 一个$n$维有限单纯复形$K^n$的Van Kampen不变量$V(K^n)$，如果适当地给以诠释，即为上类$\Phi^{2n}(|K^n|)$。

最后一个定理说明$n$维复形$K^n$的上类$\Phi^{2n}(|K^n|)$可以诠释为$K^n$到$R^{2n}$中线性或半线性实现的某种阻碍，对于其他的那些类$\Phi^m(|K^n|)$也同样，而这给出了这些$\Phi$-类的一个阻碍

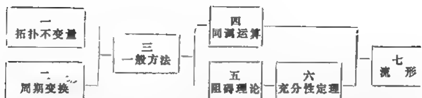
理论，这一理论由作者也由 Shapiro 所建立，特别是，象在 §2 中及其末所叙述的那样，Van Kampen 的方法配合着Whitney 的一个方法，足以移去 Van Kampen 原证中的一个缺陷 而 与 §2 的定理 5 相结合时，可用以证明下面的

**定理 6** 一个维数 $n>2$ 的有限可剖形$K^n$在$R^{2n}$中可拓扑实现的充要条件是 $\Phi^{2n}(|K^n|)=0$。

应该提到上面的简要理论可以循着种种不同的方向加以推广。首先，不仅可以考虑实现或嵌入问题，还可用同样方法来考虑局部实现或浸入以及同痕等问题，并可获得与定理 6 相当的类似结果。其次，与空间$X$相配的空间 $\tilde{X}^*$ 可视为由一两个点组成的标准空间$Z$到$X$中所有拓扑映象所构成的一个空间 $T(Z, X)$。于是不用这一$Z$以及$Z$到$X$中的拓扑映象作为标准空间与标准映象，我们也可使用其他的标准空间作为$Z$也可用其他类型比拓扑映象更灵活的映象来定义$T(Z, X)$。例如在本书中我们即考虑了对任意质数 $p$，$Z$是由 $p$ 个点所成的空间以及$Z$等于碟形等这些情形。最后，在某 些 $\Phi^m(X)=0$时 并可发展一个二阶阻碍的理论，这在$X$等于微分流形的情形已证实是富有成果的，但由于这一理论正处于发展过程中，故本书不得不割爱。对此有兴趣的读者，可参看在《中国科学》1964 年度中发表的岳景中与作者的有关短文。

## 四、本书的结构

本书共分七章，其逻辑上的联系如下图所示：




第三章在全书中占据着中心的位置。它叙述了所使用的一般方法，说明了有关的基本概念，并提出了研究各类问题的基本不变量，即研究嵌入问题的$\widetilde{\Phi}_p$-类，研究浸入问题的$\widetilde{\Psi}_p$-类以及研究同痕的$\widetilde{\textcircled{H}}$-类等。第一、二两章比较说来是属于准备性质的，前者指出了在第三章中所引进的那种基本不变量的特性，即拓扑不变但非同伦不变的那种性质，并叙述了构成具有这种特性的不变量的一个一般方法，后者则介绍了关于周期变换在没有奇点情形下的 P. A. Smith 的理论，它给出了工具以构成对我们来说是重要的那些基本不变量。

最后四章中主要介绍第三章所述一般方法的应用。第四章引进了同调运算，与通常方法不同而仍然依据于 P. A. Smith 关于周期变换的理论，通过这些运算表达出嵌入与浸入的某些条件，特别是因此证明了 §2 中 Thom 的定理 3 以及 §3 中的定理 3，第五章包括了 Van Kampen 阻碍理论在嵌入、浸入与同痕方面的推广，依据这一阻碍理论将在第六章中证明，在一般情形时用我们的基本不变量来表达的那些必要条件，在某些临界情形下同时也是充分的。最后一章则致力于流形的嵌入、浸入与同痕问题，我们不仅证明了 Whitney 的那些定理（§2 的定理 1 与 2），并证明了各种条件，即象第三章中用本书的基本不变量所表达的条件，象第四章中用同调运算表达的条件，以及在末一章中用示性类来表达的那些条件，在组合流形的情形下恰恰是彼此等价的。

应该提出，我们所考虑的问题主要是§I的问题I与Ⅱ，而问题Ⅲ实际上并未触及，即使是Whitney的定理以及各种条件的等价关系，我们也是就组合流形的拓扑嵌入与线性嵌入等等这些情形下来考虑的，而不是考虑微分流形的微分嵌入等等情形，因此整个处理方式可以说是初等性质的，唯一的例外或许是第六章的片段以及第七章的§5。事实上，微分流形的微分嵌入等问题需用的方法与工具和本书中所使用者相距甚远，也因为这一原因我们完全把它略去了。

在本书之末又附入了一些历史性注释，对于有关的历史发展以及与其他理论的联系作了一些说明。

作者非常感谢许多同志的帮助，特别应该提到北京大学的廖山涛教授与中国科学院数学研究所已故岳景中同志。对于前者，作者曾借用他不少重要的想法并贯串于全书之中，而且在第七章中占着重要地位的吴振德的工作，是在廖先生的协助指导下完成的；对于后者，作者曾与他有过不少可贵的讨论，而且第五章中一个重要定理由他给出了一个简单漂亮的证明，并得到他的允许而插入本书中。此外，作者还愿意提到李培信、江嘉禾、熊金城与虞言林等同志，他们都是在中国科学院数学研究所工作，与作者共事。

# 印刷电路与集成电路中的布线问题

作为《可剖形在欧氏空间中的实现问题》示嵌类理论的一个实际应用，本文介绍了印刷电路与集成电路的布线问题。集成电路是60年代的产物，70年代则发展为大规模的集成电路(LSI)，它的出现改变了电子计算机的设计思想。在应用分离元件的时代，一个主要的设计要求是力求采用最少量的元件与电路，而现在则已认识到主要矛盾在于LSI间的连接而非元件与电路的数量。丢开有关元件与电路图形的几何尺寸以及性能与工艺等因素不计，则连接问题或所谓布线问题在数学上可归结为一个线图在一个或几个平面中的嵌入与相连的问题。国外有些专著把这一问题视为未来新型计算机设计成败的关键，虽言之过甚，但自60年代初以至最近，国外每年都有不少文献探讨这一数学问题，这决不是偶然的。就作者查到的文献来说，国外远未解决这一已化成数学形式的问题，更不用说需要考虑性能工艺以及多快好省等其他许多因素了。

作者在1966—1967年间，从示嵌类理论入手，部分解决了上述问题，至1973年算是彻底解决了数学方面的问题，并脱离了示嵌类理论这一框框，所得结论与使用方法曾用简报形式发表于科学通报1974年第5期226—228页，题目是《线性图的平面嵌入》，本文是这一简报的详细论述。欢迎有关同志把本文与国外类似文献进行分析比较，以资鉴别，并提出批评意

见。由于作者接触实际少，更乏实践经验，同时写作时间仓促，在问题的提法与解法要求上与实际情况有所出入是很自然也是难免的，亟盼有关同志指出缺点错误，并提出新的问题，以便作更进一步的深入考虑。

## 一、问题的提出

### 1. 问题的背景与来历

集成电路的出现产生了第三代计算机系统，而大规模集成电路的迅速发展又促进了第四代计算机的出现，印刷电路或集成电路以及大规模集成电路把大量元件或／与门电路构成于一块半导体片上。在这些元件或／与门电路间用导线相连，即所谓布线或互连。由于这些导线不能相互交叉，因此，即使在极简单的情形，要在一个平面上实现布线也往往是不可能的。为此，元件或／与门电路间的相互布线一般说来至少需要两层才行。这样就必须采用多层布线，利用通孔将不同两层上的布线连接起来，或则采取跨接与穿接的办法来避免不应有的交叉。

究竟元件或／与门电路应如何配置，各层上的导线应如何布设，不同层间应如何通孔连接，或应在何处跨接穿接，即现在所称布线问题的主要内容。自然，在这里我们将元件或／与门电路的形状大小，以及导线的粗细长短与是否过密等这一类内容已略去不加考虑，更不用说牵涉到电路性能这一类内容了。

作为一个简单的实例说明，试考虑图1所示一个通用的触发器电路。电路中有：

晶体管2（$T$ 1—2）；

二极管8（$D$ 1—8）；

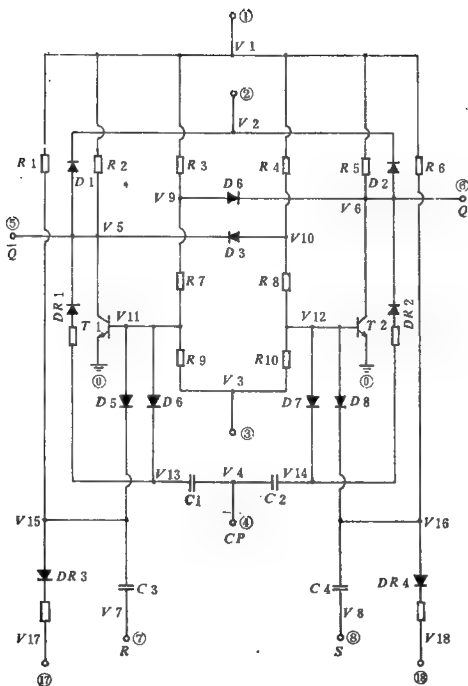

①
V 1
②
V 2
R 1
D 1
R 2
R 3
R 4
R 5
D 2
R 6
V 9
D 6
⑥
Q
V 6
⑤
Q̄
V 5
D 3
V10
R 7
R 8
DR 1
T 1
V11
V12
T 2
DR 2
R 9
R10
⓪
V 3
D 5
D 6
D 7
D 8
③
V13
V 4
V14
C1
C 2
V 15
④
CP
V16
DR 3
C 3
C 4
DR 4
V 7
V 8
V17
⑦
R
⑧
S
V18
⑰
⑱

图 1

电　阻10（$R$1—10）；

电　容4（$C$ 1—2）；

以及电阻二极管元件组4（$DR$1—4）。

各端⓪指地，①—③为固定电源，⑤，⑥为输出端，$Q$与$\bar{Q}$，$CP$为打入端，$S$与$R$各为置位与复位端。

显然这样一个电路要配置在同一平面层上是不可能的。由于电源与地线一般布设在与逻辑线不同的平面层上，因而可把这些端线以及直接相连的元件略去而只考虑所得如图2所示简化后的电路即可。

粗略看来，如果我们将原给电路图1或简化后图2中的所有横向导线布设在一平面上，所有纵向导线布设在另一平面上，再按导线相接处用通孔相连，则理论上任何复杂的电路图只需用两个（或三个）平面层就可完成布线了。但这样通孔数目将不必要地过多，而通孔的存在正是使集成电路性能与成品率大为降低的重要因素之一。因之这种做法不能符合实际需求而需另觅途径。这正是问题之困难所在。

仍回到前面图2。注意各输入输出端需配置在平面层的边缘上，又在彼此相连且无元件阻隔的导线上电位到处相同，这些电位在图中记作$V$4—14（在原电位图1中电位为$V$0—18）。由于不考虑元件的几何形状与大小，我们可把这一简化电路图改成图3那样的线图，其中各元件与电位都用点表示，$B$点则代表边缘。容易看出，简化电路的布线问题与这一线图的布线问题完全等价。解决了后一问题，即可获得原来问题的解决方法。较详细的说明可参阅例如“Goldstein-Schweikert, Bell System Technical Journal, 52 (1973), 135”

显然，即使象图3那样简单的线图，要布设在同一平面层

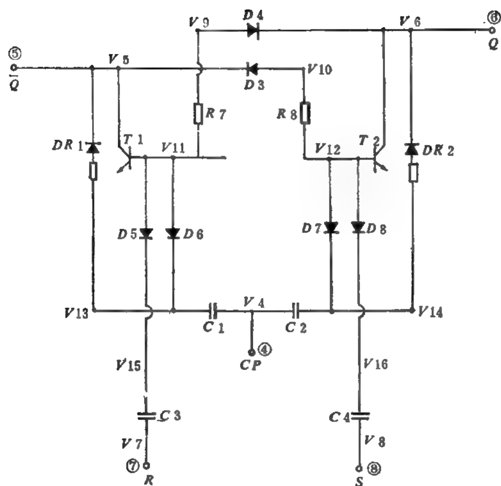

V9
D4
V6
⑥
Q
⑤
$\bar{Q}$
V5
V10
D3
R7
R8
DR1
T1
V11
V12
T2
DR2
D5
D6
D7
D8
V13
V4
V14
C1
C2
④
CP
V15
V16
C3
C4
V7
V8
⑦
R
⑧
S

图 2

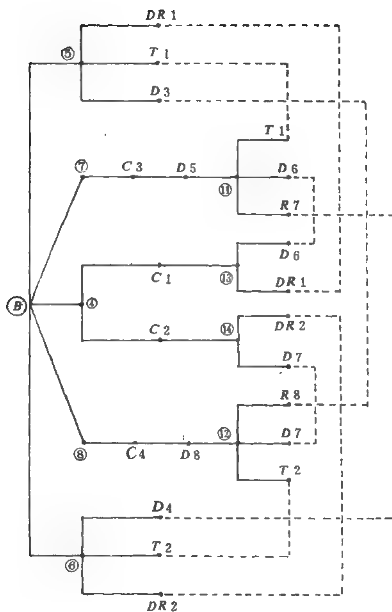

DR 1
⑤
T 1
D 3
T 1
⑦
C 3
D 5
D 6
⑪
R 7
D 6
C 1
⑬
DR 1
Ⓑ
④
C 2
⑭
DR 2
D 7
R 8
⑫
D 7
⑧
C 4
D 8
T 2
D 4
T 2
⑥
DR 2

图 3

中也是不可能的。为了避免出现不应有的交叉，必须放弃若干连线，把它们布设在另一个（必要时另几个）平面层上，再用通孔或跨接穿接与其它部分连上。但究竟应放弃哪些连线，使余下的部分可布设在同一平面层上，且其具体的布设方法如何，致使通孔或跨接穿接的数目尽量减少，则决不是一个简单的问题。象上面这种简单的实例，固然不难通过尝试与错误（trial and error）的办法来做出布线方案，但对于一个包括成百上千个元件或／与门电路甚至更多的复杂情形，则如果没有一个切实可行的方法指导系统地进行布线，盲目的尝试将是不可能的。就作者所知，至少从国外公开发表的资料看来，文献虽多，但问题远没有解决。

本附录的目的，在于给出彻底解决上述布线问题的一个切实可行的方法，所用通孔数目也将大量减少，虽不能保证达到最小限度。

如所周知，多层布线技术是大规模集成电路中较关键的技术，导线布设是印刷电路板设计最中心的问题，大规模集成电路技术的最后成败将取决于这方面的进展和革新。而且，由于大规模集成电路互连的复杂性，还需要一定的自动布线方法。自动化布线问题的解决，将使一台大型计算机的设计工作，只要把一些必需的逻辑方程式送入一台较小的计算机，就可坐而待成，而且能高速度地把设计方案传送出来。我们认为，本附录不仅提供了这样做的原则与方法，而且这个方法是切实可行的。我们希望在不久将来看到这个方法的具体实施。

2。问题的数学形式

从上节已知集成电路的布线问题可化为把线图布线于平面中的数学问题，本节将这一数学问题以较明确的形式重述于下，

首先说明用到的一些词汇与符号。

所谓一个线图$G$，是指一些点(称为顶点)以及这些顶点之间的某些连线(称为棱，所连的顶点称为棱的端点)所构成的图形。在试图将$G$画入平面中时，规定每一棱都画成一个线段或一个不自交也不首尾相接的折线，例如，一个棱可画成下面的形状：

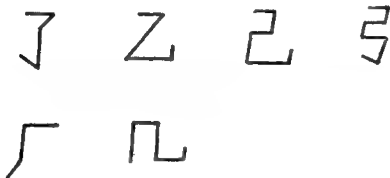


图 4

我们规定，将$G$画入平面时限于下面的方式：对$G$中任意两棱，画入平面后的折线除原来可能有公共端点之外只能在相遇处相截，即相遇之处不在折线的转折处，而在折线中段，且在该相遇处相交成角。记画入的方式为$f$，则称$f$为$G$在平面中的一个浸入，记作$f:G \subset$平面。

所谓线图$G$在平面中布线，是指将$G$如实地画在平面之中，即不相遇(或只有端点公共)的棱画入后的折线也不相遇(或只有相应端点公共)。这一般是不可能的。如果可能，我们就说$G$能在平面中布线，或$G$能嵌入平面，或说$G$具有平面性。仍把画入的方式记作$f$，则称$f$是$G$在平面中的一个嵌入，并用记号$f:G\subset$平面来表示。显然嵌入也是一个浸入，但浸入不必是嵌入。

如果$T$是$G$的一个子图，在把$G$画入平面成为一个浸入时，

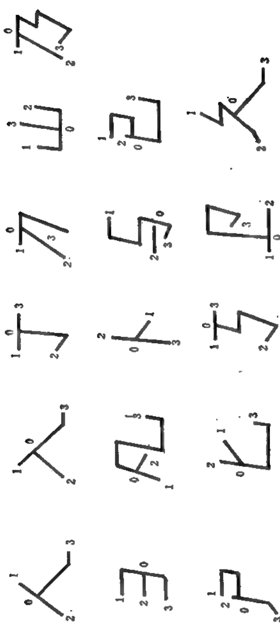


图 5

对 $T$ 来说是一个嵌入，但对于在 $G$ 中而不在 $T$ 中的那些棱来说，画入后至多除原有可能的公共端点外都不再与 $T$ 相遇，则称这一画法 $f$ 为相对于 $T$ 的浸入，记作 $f: G \underset{T}{\subset}$平面。

设线图 $G$ 具有平面性而 $f$，$g$ 是两个嵌入。如果在 $f$，$g$ 下各棱画成的折线形状长短各不相同，但相互位置关系相仿，则我们将径直视 $f$，$g$ 为相同的嵌入而不加区别。例如，有四个顶点0，1，2，3以及三个棱 01，02，03 的入字形线图，可以嵌入成以下各种图形：

这些嵌入都可视为与左下面的嵌入相同：




图 6

但如果把以上各图中的 1，2 两顶点互易，则所得诸嵌入彼此相同，而与以前诸嵌入相异，易知入字形线图的不同嵌入恰有图 6 的两种。

设 $T$ 是 $G$ 的子图而 $f$，$g$ 是 $G$ 相对于 $T$ 的两个浸入，如果在上面意义下 $f$，$g$ 限制在 $T$ 的嵌入是相同的，则称 $f$，$g$ 相对于 $T$ 是相同的浸入。

若 $f$，$g$ 是 $G$ 的相同嵌入，则记作 $f \sim g$。若 $f$，$g$ 相对于 $T$ 是相同的浸入，则记作 $f \sim g$。

就本附录有关的布线或嵌入问题来说，不妨对线图 $G$ 作以下限制，以后不再交待。

限制(1) $G$ 是连通的，即 $G$ 不能分解成两个没有顶点公共的子图，或即对任两顶点在 $G$ 中至少有首尾相继的一组棱构成

一个连接这两顶点的通道。

限制（2）$G$不能分解成两个只有一个顶点公共的子图。

限制（3）$G$中连接两个顶点的棱至多只有一个。

于是，以印刷电路或集成电路布线为背景的数学问题可概括为关于线图的以下几个问题：

（1）平面化问题。

从线图$G$的诸棱中挑出一部分（称为非平面性部分），使所余部分所成线图$G'$（称为平面性部分）可布线，即嵌入于平面中。

（2）具体布线或具体嵌入问题。

对于已知可嵌入于同一平面中即已知有平面性的线图$G'$，给出在平面中具体嵌入的方法。

（3）布线或嵌入分类问题。

对能嵌入的线图，将所有可能的不同嵌入方法列举出来进行分类。

为解决以上诸问题，须先在理论上给出一个线图可在平面上布线或具有平面性的判准。这样的判准还须是切实可行的，即可表达成带有程序性的算法，以致所有挑出非平面性部分以及将所余部分具体布线的方法都可编成程序，因而得以在电子计算机上给出具体方案。最后这一步将称为机器化问题。

上述整个问题可表达成下图所概括的几个部分，解决办法见以后各节。

诸问题的解决途径约略可说明如下。

一个没有回路（也称闭圈）的线图称为一个树形。树形之能嵌入平面是显然的，而一个一般线图$G$之所以不能嵌入平面主要是由于$G$中有着众多回路所引起，因之我们的方法在于在

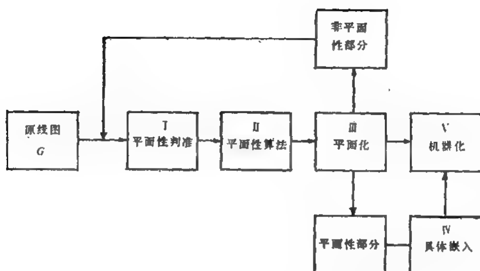



图7

G中任意选择一个尽可能大的树形T，称T中的棱为树棱，T外的棱为外棱，先将T用例如方式f任意嵌入平面，再将诸外棱逐一添入以考查是否能扩充为整个G的嵌入。必要时放弃若干外棱并改变T的原来嵌入f，以使扩充成为可能。

在第二部分中我们对树形的嵌入进行了分类。第三部分分析了一般线图G在所择树形T已嵌入后扩充为G的嵌入时所遇到的矛盾，由此获得G具有平面性的判准与算法，并给出了图7中问题I，II，III的解答。第四部分则给出将所余平面性部分嵌入平面的具体作法，即解答问题IV。最后，第五部分列举了所有可能的具体嵌入。

我们的解决方法都切实可行且带有程序性，因而可据以机器化。其中一部分已由数学研究所吴方同志帮助编成程序并在DJS-21机上试过，其余部分则尚在编试中。

## 树形的嵌入问题

### 1. 树形的嵌入

**问题** 若$T$是一树形，则$T$必可嵌入平面，但可有多种不同的嵌入方法。例如一个$H$图形可如图 8 有四种不同的嵌入法，依次记为$f^1$，$f^2$，$f^3$，$f^4$：

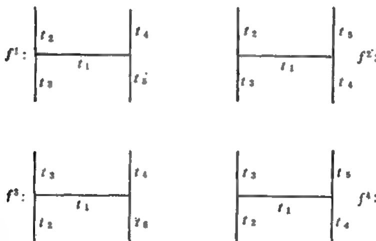



图 8

又如一个X图形如图 9 有六种不同的嵌入法，依次记为$g^1$，…，$g^6$。

问对任一树形$T$，如何确定它的不同嵌入方法。

**剖析** 考虑$T$的任一顶点$v$与以$v$为端点的任三（依一定次序排列的）树棱$t_i$，$t_j$，$t_k$。这称之为一个三棱组，记作$\langle t_i, t_j, t_k\rangle$。例如在$H$图形中，有三棱组$\langle t_1, t_2, t_3\rangle$与$\langle t_1, t_4, t_5\rangle$，在X图形中有三棱组$\langle t_1, t_2, t_3\rangle$，$\langle t_1, t_2, t_4\rangle$，$\langle t_1, t_3, t_4\rangle$，$\langle t_2, t_3, t_4\rangle$。其余的三棱组都由这些组中三个棱改变排列次

序而得，可以不再考虑。

给定一个嵌入 $f: T\subset$ 平面。一个三棱组 $\langle t_i, t_j, t_k\rangle$ 的三个棱 $t_i$, $t_j$, $t_k$ 在 $f$ 下绕 $v$ 旋转的次序可以是反钟向也可以是顺钟向的，例如对 $H$ 图形的嵌入 $f^1$, …, $f^4$，各三棱组旋向的顺反可列表如下：

H 图形三棱组旋向顺反表

| 三棱组 \ 嵌入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\langle t_1, t_2, t_3\rangle$ | 反 | 反 | 顺 | 顺 |
| $\langle t_1, t_4, t_5\rangle$ | 顺 | 反 | 顺 | 反 |

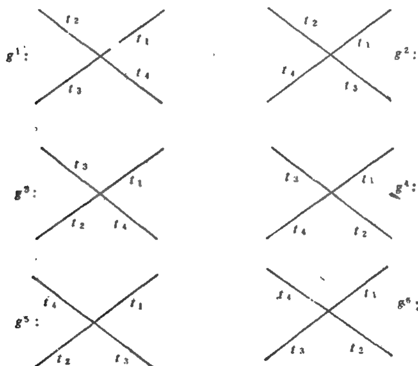



图 9

同样对X图形有下表：

**X 图形三棱组旋向顺反表**

| 嵌入 / 三棱组 | $g^1$ | $g^2$ | $g^3$ | $g^4$ | $g^5$ | $g^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\langle t_1, t_2, t_3\rangle$ | 反 | 反 | 顺 | 顺 | 反 | 顺 |
| $\langle t_1, t_2, t_4\rangle$ | 反 | 反 | 反 | 顺 | 顺 | 顺 |
| $\langle t_1, t_3, t_4\rangle$ | 反 | 顺 | 反 | 反 | 顺 | 顺 |
| $\langle t_2, t_3, t_4\rangle$ | 反 | 顺 | 顺 | 反 | 反 | 顺 |

显然两个嵌入 $f: T\subset$平面与 $f': T\subset$平面是否相同可由各三棱组在 $f$ 下与在 $f'$ 下的旋向是否相同来加以区别。由于旋向恰有顺反两种不同情形，故可用一个模2数（0或1）来标志其不同。为此，对任一嵌入 $f: T\subset$平面与三棱组 $\langle t_i, t_j, t_k\rangle$ 引入一旋向数 $f_{ijk}$ 使

$$f_{ijk}=\begin{cases}0, & t_i,\ t_j,\ t_k \text{ 在 } f \text{ 下依反钟向旋转时，}\\ 1, & t_i,\ t_j,\ t_k \text{ 在 } f \text{ 下依顺钟向旋转时。}\end{cases}$$

对 $(i, j, k)$ 的一个排列 $P=\begin{pmatrix} i & j & k \\ i' & j' & k'\end{pmatrix}$，显然有

$$f_{i'j'k'}=f_{ijk}+\varepsilon_p,$$

这里

$$\varepsilon_p=\begin{cases}0, & P\text{ 是偶排列时，}\\ 1, & P\text{ 是奇排列时。}\end{cases}$$

对于所有的三棱组 $\langle t_i, t_j, t_k\rangle$，这些相应的旋向数或简称旋数 $f_{ijk}$ 构成一个模2数组。在$H$图形为（相差一排列的诸

三棱组只保留其中一个，下同)：

$$(f_{123},\ f_{145})。$$

对于嵌入$f^1$，……，$f^4$，这一数组依次为：

$$(0,1),\ (0,0),\ (1,1),\ (1,0)。$$

同样，对X图形在嵌入$g:X\subset$平面下有一相应旋数组

$$(g_{123},\ g_{124},\ g_{134},\ g_{234})。$$

对于嵌入$g^1$，…，$g^6$，这一数组依次为：

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1),$$
$$(1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$(0,\ 1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1)。$$

显然，对于一个确定的树形$T$，不同的嵌入将有不同的旋数组。例如$H$图形的不同嵌入恰与不同的旋数组相对应，其种数为$2^2=4$。但并不是每一个数组都是某一嵌入的旋数组，例如对X图形，数组$(g_{123},\ g_{124},\ g_{134},\ g_{234})$可取$2^4=16$种不同的组值，但实际上只有6种组值才能成为嵌入的相应旋数组。这说明这些旋数间必须满足某种制约关系。从上表可知，一个关系是：

$$g_{123}+g_{124}+g_{134}+g_{234}=0$$

或

$$g_{123}=g_{124}+g_{134}+g_{234}。$$

因而$g_{123}$由$g_{124}$，$g_{134}$，$g_{234}$完全确定。这反应了如下事实：把$t_4$的位置固定，则$t_1$，$t_2$，$t_3$中任两棱与$t_4$的旋向如果已定，即$g_{124}$，$g_{134}$，$g_{234}$的值已定时，$t_1$，$t_2$，$t_3$的旋向完全确定，即$g_{123}$的值也因之而定。但除了上述关系外，$(g_{124},\ g_{134},\ g_{234})$的值也不是完全任意的，因为它们有$2^3=8$种不同的组值，而嵌入的方法只有六种，这说明$g_{124}$，$g_{134}$，$g_{234}$还有其他必须满足

的关系。在解决这一问题之前，我们先引入树根的概念，以使问题简化如下。

任取树形 $T$ 的一个自由端 $O$，称之为树根，于是任一不同于 $O$ 的顶点 $v$，在树形中自 $v$ 至 $O$ 恰有一通道，记之为 $P_v$。在通道 $P_v$ 上以 $v$ 为端点的树棱记为 $t_v$。设 $t_i$，$t_j$，$t_k$ 为 $T$ 中以 $v$ 为前端（即自 $O$ 出发到 $t_i$ 时先到达的端点）的任意三棱图（10），由前知，$f_{ijk}$ 由 $f_{vij}$，$f_{vik}$，$f_{vjk}$ 完全决定：

$$f_{ijk}=f_{vij}+f_{vik}+f_{vjk}。$$

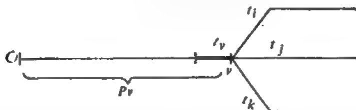



图 10

因而对于刻划树形的嵌入，可易数组（$f_{ijk}$）为个数较少的数组（$f_{vij}$）。为此，我们将 $f_{vij}$ 简化记号为

$$f_{vij}=f_{ij}，$$

这里

$$f_{ij}=f_{ji}+1$$

且

$$f_{ij}=\begin{cases}0，& t_v，t_i，t_j \text{ 在 } f \text{ 下反钟向排列时，}\\1，& t_v，t_i，t_j \text{ 在 } f \text{ 下顺钟向排列时。}\end{cases}$$

仍称 $f_{ij}$ 为旋数（相对于选定的树根 $O$ 而言）。这些旋数构成一个旋数组（$f_{ij}$），在组中每一对以同一顶点作为前端的两个树棱 $t_i$，$t_j$ 保留了一个旋数 $f_{ij}$ 或 $f_{ji}$。例如，在 $H$ 图中取 $t_2$ 的自由端为树根 $O$，在 $X$ 图中取 $t_1$ 的自由端为树根 $O$，则对嵌

入 $f: H\subset$平面与 $g: X\subset$平面的旋数组可各取为

$$(f_{13}, f_{45}) \text{ 与 } (g_{23}, g_{24}, g_{34})。$$

综合上述，于是有下面的结论。

**嵌树术** 对于树根为$O$的树形$T$，任一嵌入$f$确定一组旋数$(f_{ij})$。两个嵌入$f$，$g: T\subset$平面是否相同可视相应旋数组$(f_{ij})$与$(g_{ij})$的完全相同与否而定：

$$\boxed{f\sim g \Longleftrightarrow (f_{ij}) = (g_{ij})}$$

以下假定$T$的树根$O$已选定，所有旋数均对选定的树根$O$而言。

2．旋数关系(特殊情形)

**问题** 设$t_i$，$t_j$，$t_k$为以同一顶点$v$为前端的任三树梭，由于$f_{ij}$，$f_{jk}$，$f_{ki}$的每一数均可为0或1，故数组$(f_{ij}, f_{jk}, f_{ki})$可有八种不同的组值，但$t_i$，$t_j$，$t_k$在$f$下的不同旋向只有六种，因而$(f_{ij}, f_{jk}, f_{ki})$的八种组值中至少有两种实际上不可能出现。换言之，在$f_{ij}$，$f_{jk}$，$f_{ki}$间必然存在某种关系作为制约，试求这种关系的具体表达形式。

**(特殊)旋数术** 若树梭$t_i$，$t_j$，$t_k$以同一顶点为前端，则置

$$Q_{ijk}(f) = f_{ij}f_{ik} + f_{jk}f_{ji} + f_{ki}f_{kj}$$

时，必有

$$\boxed{Q_{ijk}(f) = 1}$$

且满足这一关系的不同数组$(f_{ij}, f_{jk}, f_{ki})$恰有六个，各与$t_i, t_j, t_k$在平面中六个不同的确定旋向相对应。

**注释**　如前记自 $v$ 至树根 O 通道 $P_v$ 上以 $v$ 为端点的树棱为 $t_v$。在嵌入 $f$ 下自 $t_v$ 起作反钟向旋转时 $t_i$, $t_j$, $t_k$ 的次序可有六种不同方式，记其相应 $f_{ij}$ 等值列作下表。

| 情　形 | $f$ 下反钟向次序 | $f_{ij}$ | $f_{jk}$ | $f_{ki}$ |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $t_v, t_i, t_j, t_k$ | 0 | 0 | 1 |
| (2) | $t_v, t_i, t_k, t_j$ | 0 | 1 | 1 |
| (3) | $t_v, t_j, t_k, t_i$ | 1 | 0 | 0 |
| (4) | $t_v, t_j, t_i, t_k$ | 1 | 0 | 1 |
| (5) | $t_v, t_k, t_i, t_j$ | 0 | 1 | 0 |
| (6) | $t_v, t_k, t_j, t_i$ | 1 | 1 | 0 |

从表中可看出，$(f_{ij}, f_{jk}, f_{ki})$不能取的数组为

| 情　形 | $f$ 下反钟向次序 | $f_{ij}$ | $f_{jk}$ | $f_{ki}$ |
|---|---|---|---|---|
| (7) | 不可能出现 | 0 | 0 | 0 |
| (8) | 不可能出现 | 1 | 1 | 1 |

今尝试作 $f_{ij}$, $f_{jk}$, $f_{ki}$ 的代数式 $F$(系数是模 2 数)，使对前六组值都有 $F=1$ 而对后二不可能取的数组有 $F=0$。显然 $F$ 不能取为 $f_{ij}$, $f_{jk}$, $f_{ki}$ 的一次式。其次对二次式进行尝试，此时二次项

$$f^2_{ij}=f_{ij},\quad f^2_{jk}=f_{jk},\quad f^2_{ki}=f_{ki},$$

而对上八个数组的二次项 $f_{ij}f_{ik}$ 等值依次可列成下表：

| 情形 | $f^2_{ij}$ | $f^2_{jk}$ | $f^2_{ki}$ | $f_{ij}f_{ik}$ | $f_{jk}f_{ji}$ | $f_{ki}f_{kj}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| (2) | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| (3) | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| (4) | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| (5) | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| (6) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| (7) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (8) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

由表知合于条件的一个代数式是

$$f_{ij}f_{ik}+f_{jk}f_{ji}+f_{ki}f_{kj}\text{。}$$

术文中的 $Q_{ijk}(f)$ 即由此而来。据以上分析，自然得出术文。

3．旋数关系（一般情形）

（一般）旋数术　设 $t_1$，…，$t_s$ 为以同一顶点 $v$ 为前端的任意树梭。由前（特殊）旋数术知，对其中任意三梭 $t_i$，$t_j$，$t_k$，在嵌入 $f:T\subset$ 平面下应有

$$Q_{ijk}(f)\equiv f_{ij}f_{ik}+f_{jk}f_{ji}+f_{ki}f_{kj}=1\text{。}$$

换言之，引入一组（模 2）未知数 $(i,j=1,\cdots,s;i\neq j)$

$$\varphi_{ij}=\varphi_{ji}+1,$$

并置 $(i,j,k=1,\cdots,s$ 且互不等$)$

$$Q_{ijk}(\varphi)=\varphi_{ij}\varphi_{ik}+\varphi_{jk}\varphi_{ji}+\varphi_{ki}\varphi_{kj},$$

则数组 $(f_{ij})$ 应是方程组

$$(Q)\qquad Q_{ijk}(\varphi)=1$$

的一个解答。

不仅如此，这组方程的不同解答恰与 $f$ 下 $t_1$，…，$t_s$ 的不

同旋向次序相对应。

**注释** 在 $s=3$ 时，方程组($Q$)只有一个方程 $Q_{123}(\varphi)=1$。这时已知($Q$)的解答与 $f$ 下 $t_1$，$t_2$，$t_3$ 的旋向次序相对应。在 $s>3$ 时，方程组($Q$)的方程个数为 $\binom{s}{3}$，旋数 $f_{ij}(=f_{ji}+1)$的个数为 $\binom{s}{2}$，旋向次序则有 $s!$ 种。因而虽然对每一旋向次序有一确定的方程组的解答，但反之是否对每一组解答有一确定的旋向次序与之相当，并不显然。本术指出答案是正面的，即解答与旋向次序完全对应。为此对 $s$ 用归纳法验证如下。

设$(\varphi_{ij})=(c_{ij})(c_{ij}=c_{ji}+1, i, j=1,\cdots,s)$是方程组($Q$)的一组解答。如前记通道 $P_v$ 上以 $v$ 为端点的树梭为 $t_v$，又记由 $t_v$，$t_1$，$\cdots$，$t_k$ 所构成的星状树形为 $T_k$，由归纳假设已知，有嵌入 $f:T_{s-1}\subset$平面使

$$f_{ij}=c_{ij}\quad(i,j=1,\cdots,s-1)。$$

设在 $f$ 下 $t_v$，$t_1$，$\cdots$，$t_{s-1}$ 依反钟向旋转时次序为 $t_v$，$t_{i_1}$，$\cdots$，$t_{i_{s-1}}$，这里$(i_1,\cdots,i_{s-1})$是$(1,\cdots,s-1)$的一个排列。于是有

$$f_{i_m i_n}=0\quad(m<n, m,n=1,\cdots,s-1)。$$

设 $c_{i_1 s}$，$c_{i_2 s}$，$\cdots$，$c_{i_{s-1} s}$ 中最早一个$\neq 0$ 的是 $c_{i_{p+1} s}$，即

$$c_{i_1 s}=\cdots=c_{i_p s}=0,$$

$$c_{i_{p+1} s}=1。$$

由于对 $q>p+1$ $(c_{ij})$满足方程 $Q_{i_{p+1} i_q s}(\varphi)=1$，故有等式

$$c_{i_{p+1} i_q}c_{i_{p+1} s}+c_{i_q s}c_{i_q i_{p+1}}+c_{s i_{p+1}}c_{s i_q}=1。$$

因

$$c_{i_{p+1} i_q}=f_{i_{p+1} i_q}=0,$$

$$c_{i_q i_{p+1}}=f_{i_q i_{p+1}}=1,$$

$$c_{s i_{p+1}}=0,$$

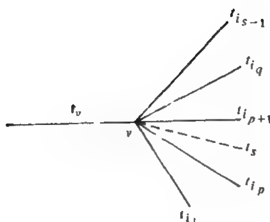



图 11

故得

$$c_{i_q s} = 1。$$

今作嵌入 $f:t_s\subset$ 平面使在 $f$ 下 $t_s$ 位于 $t_{i_p}$ 与 $t_{i_{p+1}}$ 之间，则显然有

$$f_{si} = c_{si}, i = 1, \cdots, s-1,$$

即有嵌入(见图 11)：

$$f:T_s\subset \text{平面},$$

使原来解答 $(\varphi_{ij}) = (c_{ij})$ 与在 $f$ 下反钟向的旋向次序

$$t_v, t_{i_1}, \cdots, t_{i_p}, t_s, t_{i_{p+1}}, \cdots, t_{i_{s-1}}$$

相对应。至此验证完毕。

4。树形嵌入的比较

**问题** 为对树形 $T$ 的所有嵌入进行分类，首先需对任两嵌入 $f:T\subset$ 平面与 $g:T\subset$ 平面进行比较，试考虑比较的方法。

**树形比嵌术** 设 $f:T\subset$ 平面，$g:T\subset$ 平面。对以 同一顶点

$v$ 为前端的任两树棱 $t_i$，$t_j$，置

$$\varepsilon_{ij}=f_{ij}+g_{ij}.$$

则仍以 $t_v$ 表通道 $P_v$ 上以 $v$ 为端点的树棱时，有

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}0, & \text{在 } f,\ g \text{ 下 } t_v,\ t_i,\ t_j \text{ 旋向相同,}\\ 1, & \text{在 } f,\ g \text{ 下 } t_v,\ t_i,\ t_j \text{ 旋向相反。}\end{cases}$$

显然，数组$(\varepsilon_{ij})$足以比较 $f$，$g$ 两嵌入的异同：

$$\boxed{f\sim g \Longleftrightarrow \text{所有 } \varepsilon_{ij}=0}$$

注意，与 $f_{ij}=f_{ji}+1$，$g_{ij}=g_{ji}+1$ 不同，在诸 $\varepsilon$ 间有关系

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}.$$

从这些数的几何意义可看出其理由。

5. *树形嵌入的分类*

**问题** 设 $T$ 是树形，则 $T$ 必可嵌入平面。试对不同的嵌入进行分类。

**剖析** 由比嵌术，两个不同的嵌入

$$f:T\subset\text{平面},\quad g:T\subset\text{平面}$$

可由诸数

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}=f_{ij}+g_{ij}$$

确定，因而若任取一嵌入 $f:T\subset$平面，则任一其他嵌入将由数组$(\varepsilon_{ij})$唯一确定。然而诸数 $\varepsilon_{ij}$ 不能是任意的，因为依旋数关系，对于任三以同一顶点 $v$ 为前端的树棱 $t_i$，$t_j$，$t_k$，应有

$$Q_{ijk}(f)\equiv f_{ij}f_{ik}+f_{jk}f_{ji}+f_{ki}f_{kj}=1$$

以及

$$Q_{ijk}(g)\equiv g_{ij}g_{ik}+g_{jk}g_{ji}+g_{ki}g_{kj}=1.$$

后者也可写作

$$(f_{ij}+\varepsilon_{ij})(f_{ik}+\varepsilon_{ik})+(f_{jk}+\varepsilon_{jk})(f_{ji}+\varepsilon_{ji})+(f_{ki}+\varepsilon_{ki})$$

$$(f_{kj}+\varepsilon_{kj})=1。$$

换言之，若引入一些(模 2)未知数

$$x_{ij}=x_{ji},$$

则$(\varepsilon_{ij})$应是下面一组方程的解：

$$(f_{ij}+x_{ij})(f_{ik}+x_{ik})+(f_{jk}+x_{jk})(f_{ji}+x_{ji})$$
$$+(f_{ki}+x_{ki})(f_{kj}+x_{kj})=1。$$

反之，若$(x_{ij})=(\varepsilon_{ij})$是上组方程的一个解答，则

$$(\varphi_{ij})=(f_{ij}+\varepsilon_{ij})$$

满足方程组

$$(Q)\qquad \varphi_{ij}\varphi_{ik}+\varphi_{jk}\varphi_{ji}+\varphi_{ki}\varphi_{kj}=1。$$

因而由一般旋数术，对于任一顶点 $v$，有一嵌入使通道 $P_v$ 上的 $t_v$ 以及以 $v$ 为前端的诸树棱在此嵌入下有一确定旋向使相应旋数即为上述诸数 $f_{ij}+\varepsilon_{ij}$。今作嵌入 $g:T\subset$ 平面使在 $g$ 下每一顶点处诸棱的旋向都恰如上述，则显然有

$$g_{ij}=f_{ij}+\varepsilon_{ij}。$$

由此得到下述结论。

**嵌树术** 设 $f:T\subset$平面是树形 $T$ 的一个固定嵌入，则 $T$ 在平面中的所有不同嵌入与下述方程组的解答$(x_{ij}=x_{ji})$：

$$(x_{ij})=(\varepsilon_{ij})$$

一一对应：

$$\boxed{Q_{ijk}(f,x)=1}$$

其中

$$Q_{ijk}(f,x)=(f_{ij}+x_{ij})(f_{ik}+x_{ik})$$
$$+(f_{jk}+x_{jk})(f_{ji}+x_{ji})$$
$$+(f_{ki}+x_{ki})(f_{kj}+x_{kj})。$$

诸方程则与以同一顶点为前端的三棱组$\langle t_i, t_j, t_k\rangle$相对应。

## 三、线图的嵌入问题

### 1. 交截数

**举例** 已知任一树形必可嵌入平面，但若线图中有闭圈（或称回路），嵌入就不一定可能。或者即使可能，若将线图中所含树形嵌入后，是否可将嵌入扩充至所余诸棱，也当视树形的嵌入是否适当而定。

例如设线图$G$有五个顶点$v_0$，$v_1$，…，$v_4$和六个棱$t_1$,…，$t_4$，$e_{12}$，$e_{34}$，其中$t_i$连结$v_0$与$v_i(i=1,\cdots,4)$，$e_{12}$与$e_{34}$各连结$v_1$，$v_2$与$v_3$，$v_4$。命$t_1$，…，$t_4$所成树形为$T$。若嵌入$T$在反钟向旋转时依次为$t_1$，$t_2$，$t_3$，$t_4$，则可有三种不同的方式扩充这一嵌入至整个线图$G$，见附图12。但若嵌入$T$在反钟向

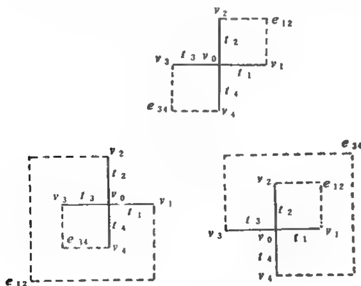



图 12

旋转时依次为 $t_1$，$t_3$，$t_2$，$t_4$，如附图 13，即不能将这一嵌入扩充至 $G$，原因甚为显然：若先扩充 $e_{12}$ 的嵌入，则不论嵌入成图 14 或图 15，$e_{12}$ 与 $t_1$，$t_2$ 所围成的闭圈将把平面分成内外两部分，$v_3$ 与 $v_4$ 必一在闭圈之内而另一在闭圈之外。因而将连结 $v_3$，$v_4$ 的 $e_{34}$ 嵌入平面时必将与闭圈相交而不能得一扩充至整个线图 $G$ 的嵌入。

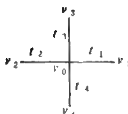


图 13

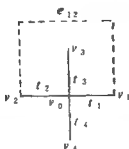


图 14

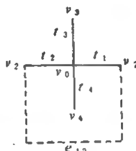


图 15

上面提到了这样一个事实：平面上的任一闭圈把平面分成内外两部分。同在内部(或同在外部)的任意两点都可用完全处于内部(或外部)的折线相连结。但若两点一在内部而另一在外部，则任一连线必与圈线相遇。

这一事实国外通称 Jordan 定理。我们认为可迳直称之为 Jordan 公理。作为定理来加以证明，不是绝对必要的。事实上，在平面拓扑学中这也是作为平面公理系统的公理之一来引入的。即使在 Hilbert 的初等几何学公理系统中，也有好几条颇为繁琐的平面次序公理，其作用犹如这一 Jordan 公理。

以下将上述直观的经验事实称为闭圈原理。它是线图有时不能嵌入平面的根本原因，也是布线之所以成为较难的问题的

根本原因。

以后，我们还需要下面较一般的形式，例见图 16。

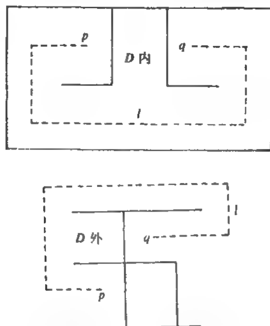



图 16

设平面上有一闭圈 $C$ 以及 $C$ 内部(与外部)若干通向 $C$ 而互不相遇的折线，则平面上不在 $C$ 与这些折线上的点构成两个区域 $D_{内}$ 与 $D_{外}$，各以 $C$ 以及这些分别在 $C$ 内与 $C$ 外的折线为其边界集，记作 $\bar{D}_{内}$ 与 $\bar{D}_{外}$。同在 $D_{内}$ 与 $\bar{D}_{内}$ 或同在 $D_{外}$ 与 $\bar{D}_{外}$ 的任意两点 $p$，$q$，可用一折线 $l$ 在 $C$ 内部或外部相连，而这一折线 $l$ 至多除 $p$，$q$ 外都不与 $\bar{D}_{内}$ 和 $\bar{D}_{外}$ 相遇。但若 $p$，$q$ 分处 $D_{内}$ 与 $D_{外}$，则任一连结 $p$，$q$ 的折线必与 $C$ 相遇。

此外，我们将引入交截数的概念，使闭圈原理有定量的描述。

**交截术** 平面上一圈线 $C$ 分平面成内外两部分，若折线 $l$

的两端 $p$, $q$ 都不在 $C$ 上，而 $l$ 与 $C$ 在每一可能有的交点处相截，则 $p$, $q$ 同在 $C$ 内部或同在 $C$ 外部时，$l$ 与 $C$ 的交截点数必为偶数。反之，若 $p$, $q$ 一在 $C$ 内而另一在 $C$ 外时，$l$ 与 $C$ 的交截点数必为奇数。这一基本事实也可用公式表达如下。

引入 $l$ 与 $C$ 的模 2 交截数(简称交截数)：

$$交(l,C)=\begin{cases}0, & l\text{ 与 }C\text{ 交截点数为偶数时,}\\ 1, & l\text{ 与 }C\text{ 交截点数为奇数时。}\end{cases}$$

又引入模 2 数：

$$次_P C=\begin{cases}0, & p\text{ 在 }C\text{ 外部时,}\\ 1, & p\text{ 在 }C\text{ 内部时,}\end{cases}$$

则

$$交(l,C)=次_P C+次_Q C。$$

又平面中只在可能有的交点处相截的任两线图 $l_1$, $l_2$ 也可定一(模 2)交截数，记作交$(l_1,l_2)$。且这些交截数是加法性的，例如

$$交(l_1,l_2\cup l_3)=交(l_1,l_2)+交(l_1,l_3)。$$

2. *方法概述*

$G$ 是一遵守第一部分第 2 节中那些限制的线图，需要考虑 $G$ 在平面中能否嵌入的问题。在 $G$ 无闭圈即为一树形时，嵌入问题已由第二部分完全解决。前节例中已指出，对于一般的线图 $G$，嵌入问题的困难乃是由闭圈所引起。这些考虑导致我们采用下述方法。

在 $G$ 中选择一个含有 $G$ 中所有顶点的树形，称为 $G$ 的**最大树**，记为 $T$。相对于一固定的 $T$ 来说，$T$ 中的棱称为**树棱**，记为 $t_i$, $t_j$ 等。$G$ 中不属于 $T$ 的棱将称为**外棱**，记作 $e_\alpha$, $e_\beta$ 等。若外棱 $e_\alpha$ 的两端为 $a$, $a'$，则在 $T$ 中有一唯一的通道连结 $a$ 与

$a'$，记作 $P_\alpha$。闭圈 $e_\alpha \cup P_\alpha$ 记作 $C_\alpha$。

我们的方法可概述如下。

先将 $T$ 任意嵌入平面，记嵌入为 $f:T\subset$平面。然后考虑将 $f$ 扩充至诸外棱 $e_\alpha$。一般说来，这是不可能的。我们将引入一（模 2）数组来定量描述这一不可能的程度。这种不可能或者是由于原来嵌入 $f$ 的选择不适当所引起（见前举例），或者由于线图 $G$ 的内在矛盾所引起。我们将引入另一（模 2）数组来定量刻划这些内在矛盾，这两数组间关系的确定，导致能否改变原来的嵌入 $f:T\subset$平面，使扩充至整个 $G$ 的嵌入成为可能。

在描述树形 $T$ 的嵌入时，由二知，若事先选一树根可有许多方便，又由于在尝试将 $f:T\subset$平面扩充至诸外棱 $e_\alpha$，$e_\beta$ 等时，需要考虑 $e_\alpha$，$e_\beta$ 嵌入平面后的交截数，若 $e_\alpha$，$e_\beta$ 有公共端点，则嵌入时交截数的叙述较为繁琐。为了避免出现两个外棱有公共顶点这种情形，以及为了树根的引入，特先将线图 $G$ 与最大树 $T$ 加以适当改造。先举两例如下（实线为最大树，虚线为外棱）：

例 1　Kuratowski 线图 $K_1$。

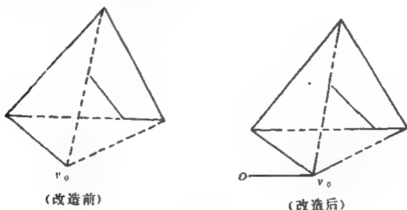



图 17

例 2　Kuratowsiki 线图 $K_5$。

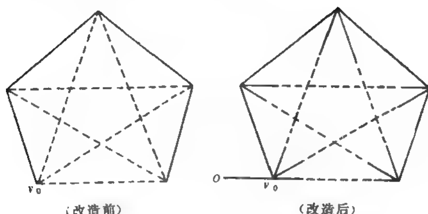



图 18

总的说来，线图的改造包括两个方面：

(1) 将任一外棱 $e_a$ 分成三段，在 $e_a$ 两端的两段归入最大树 $T$，中间的一段则作为新的外棱。

(2) 在 $T$ 中任取一点 $v_0$(不必为顶点)并添入一顶点 $O$ 作为树根以及自根 $O$ 至 $v_0$ 的一个树棱。

显然，第一种改造对于线图的嵌入无丝毫影响。对于第二种改造，如果 $v_0$ 是一个 $k$ 叉点，即在 $v_0$ 处恰有 $k$ 个棱，对原线图的每一嵌入，改造后的线图恰有 $k$ 个不同嵌入与之相当，因而解决了改造后线图的嵌入问题，同时也就解决了原来线图的嵌入问题。

由于上述，我们就已经改造的线图(仍记之为 $G$)与最大树(仍记之为 $T$)进行讨论，引入的树根记作 $O$，这时 $G$，$T$ 等具有以下诸性质：

1. 自最大树 $T$ 的任一自由端出发，至多只有一个外棱。

2. 任两外棱均无公共端点。

3. 在树根$O$处无外棱。

以下假定$G$，$T$与根$O$已固定，不再声明。

3. 矛盾数

**问题** 设$f:T\subset$平面。一般说来，$f$不能扩充为整个线图$G$的嵌入$\tilde{f}:G\subset$平面，使$\tilde{f}|T\equiv f$。问如何刻划这种不可能的程度。

**扩充术** 设任意扩充$f$为相对于$T$的浸入$\tilde{f}:G\underset{T}{\subset}$平面，使$\tilde{f}|T\equiv f$。对$T$外的任两外棱$e_\alpha$，$e_\beta$，

$$\text{交}(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta))$$

与扩充方式$\tilde{f}$无关，而由$\tilde{f}|T$即$f$完全确定，记之为$f_{\alpha\beta}$。于是

$$\boxed{f:T\subset\text{平面可扩充为}\ \tilde{f}:G\subset\text{平面，使}\ \tilde{f}|T\equiv f\Longleftrightarrow\text{一切}\ f_{\alpha\beta}=0}$$

由此知，数组$(f_{\alpha\beta})$可作为能否扩充$f:T\subset$平面为整个$G$的嵌入的一种量度。换言之，使$f$不能扩充为$G$的嵌入的内部矛盾暴露于外时可通过数组$(f_{\alpha\beta})$表现出来。为此，$f_{\alpha\beta}$将称为相应于$f:T\subset$平面的**矛盾数**，$(f_{\alpha\beta})$称为**矛盾数组**。

**注析** 设$\tilde{f}':G\underset{T}{\subset}$平面是$f:T\subset$平面的另一扩充。不妨设$\tilde{f}'(e_\alpha)$与$\tilde{f}(e_\beta)$相截(一般情形容易归结于此)，因树$T$与$e_\alpha$在$\tilde{f}$与$\tilde{f}'$下都不相遇，故

$$\text{交}(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta))=\text{交}(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(C_\beta)),$$

$$\text{交}(\tilde{f}'(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta))=\text{交}(\tilde{f}'(e_\alpha),\tilde{f}(C_\beta))。$$

又折线$\tilde{f}(e_\alpha)$，$\tilde{f}'(e_\alpha)$有相同端点，故由第三部分第一节的交截术知，右端两式相等。由此得

$$\text{交}(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta))=\text{交}(\tilde{f}'(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta))。$$

同样有

$$交(\tilde{f}'(e_\alpha),\tilde{f}'(e_\beta))=交(\tilde{f}'(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta)),$$

故

$$交(\tilde{f}'(e_\alpha),\tilde{f}'(e_\beta))=交(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta)),$$

即交$(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta))$与扩充方式号无关。这说明了符号 $f_{\alpha\beta}$ 的合理性。

显然，在 $f:T\subset$平面可扩充为整个$G$的嵌入时应有一切 $f_{\alpha\beta}=0$。反之也容易由归纳法验证如下：

将一切外棱任意排列成一次序 $e_1,\cdots,e_L$，将树添入 $e_1,\cdots,e_k$（对 $k=1,\cdots,L$）后所得线图记作 $G_k$。又置 $G_0=T$。设 $f:T\subset$平面已扩充为一嵌入（$\tilde{f}_0\equiv f:G_0\subset$平面）：

$$\tilde{f}_k:G_k\subset平面,$$

$$\tilde{f}_k|T\equiv f,$$

试考虑继续扩充到 $G_{k+1}$ 的可能性。$\tilde{f}(G_k)$分割平面成若干区域，设为 $D_1$，$\cdots,D_r$。设 $e_{k+1}$ 的两端为 $a_{k+1}$，$a'_{k+1}$，而 $\tilde{f}_k(a_{k+1})=p_{k+1}$，$\tilde{f}_k(a'_{k+1})=p'_{k+1}$。将 $p_{k+1}$，$p'_{k+1}$ 在平面中任以一折线 $l$ 相连而使 $l$ 除 $p_{k+1}$，$p'_{k+1}$ 外不与 $\tilde{f}_k(T)$相遇且与每一 $\tilde{f}_k(e_i)$至多相截。每一区域 $D_i$ 的边界集 $\dot{D}_i$ 由一闭圈 $C_i$ 以及若干在 $C_i$ 内通向 $C_i$ 而互不相遇的折线所构成，而 $C_i$ 又由 $\tilde{f}_k(T)$的一部分以及若干 $\tilde{f}_k(e_j)(1\leqslant j\leqslant k)$所组成，设为 $\tilde{f}_k(e_{ij})$，$j=1,\cdots s(i)$，折线则全由树棱所组成。

由假设知（下面符号指 $f_{\alpha\beta}$，应不致混淆为 $f_{ij}$）：

$$f_{k+1,1}=\cdots=f_{k+1,k}=0,$$

因而

$$交(l,C_i)=\sum_{j=1}^{s(i)}交(l,\tilde{f}_k(e_{ij}))=\sum_{j=1}^{s(i)}f_{k+1,i_j}=0。$$

由此据一般形式的闭圈原理知：若 $p_{k+1}$ 在某一区域 $D_i$ 的边界

且在闭圈 $C_i$ 的内部，则 $p'_{k+1}$ 也将同在 $C_i$ 的内部，因而在 $C_i$ 内部可将 $p_{k+1}$，$p'_{k+1}$ 用一折线 $l_{k+1}$ 连结使 $l_{k+1}$ 与树形 $\bar{f}_k(T)$ 除 $p_{k+1}$，$p'_{k+1}$ 外不相遇，且 $l_{k+1}$ 不与任一 $\bar{f}_k(e_1)$，…，$\bar{f}_k(e_k)$ 相遇，故可将 $\bar{f}_k$ 扩充至 $e_{k+1}$ 得 $\bar{f}_{k+1}:G_{k+1}\subset$平面使

$$\bar{f}_{k+1}(e_{k+1})=l_{k+1},$$

$$\bar{f}_{k+1}|G_k\equiv\bar{f}_k。$$

依次进行即可将 $f$ 扩充为整个 $G$ 的嵌入

$$\bar{f}:G\subset\text{平面},$$

$$\bar{f}/T\equiv f。$$

验证完毕。

4．基本关系式

问题　设 $f:T\subset$平面，则 $f$ 能否扩充为嵌入 $\bar{f}:G\subset$平面使 $\bar{f}|T\equiv f$ 的可能程度由矛盾数组 $(f_{\alpha\beta})$ 刻划。矛盾的产生导源于 $T$ 的嵌入 $f$，而这一嵌入可由数组 $(f_{ij})$ 该划（见前二）。在外部表现 $(f_{\alpha\beta})$ 与内在原因 $(f_{ij})$ 之间必有关系，试求这些关系的明确表达式。

**基本关系术**　对于 $T$ 的任两自由端 $a$ 与 $b$，命 $T$ 中连结 $a$，$b$ 与根 $O$ 的通道 $P_a$，$P_b$ 首次相遇的顶点为 $v$。命在 $T$ 中连结 $v$ 与 $a$，$b$ 的通道 $P_{va}$，$P_{vb}$ 上以 $v$ 为前端的树棱为 $t_i$，$t_j$。引入记号

$$f_{ab}=f_{ij},$$

显然有

$$f_{ab}=f_{ba}+1。$$

例如在附图 19 中有

$$f_{ab}=f_{ij}=0。$$

设外棱 $e_a$ 的两端为 $a$，$a'$：$e_a=\widehat{aa'}$，

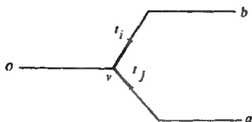
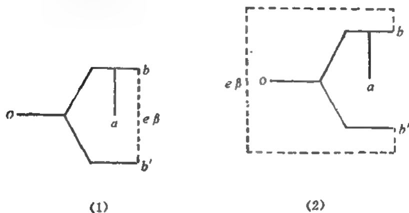
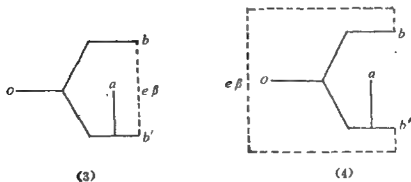



图 19

外棱 $e_\beta$ 的两端为 $b$，$b'$：$e_\beta=\widehat{bb'}$，



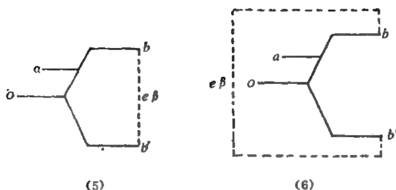


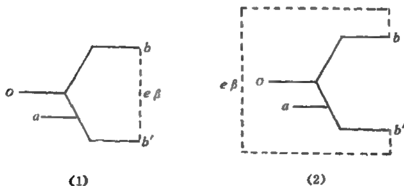

图 20

则有基本关系式：

$$\boxed{f_{a\beta}=f_{ab}+f_{ab'}+f_{a'b}+f_{a'b'}}$$

式中右边与 $a$，$a'$ 的次序无关，也与 $b$，$b'$ 的次序无关。两边都与 $a$，$\beta$ 的次序无关。

注析　任意扩充 $f:T\subset$ 平面为 $\bar{f}:G\underset{T}{\subset}$ 平面，就 $\bar{f}$ 下 $O$ 在圈线 $C_\beta=e_\beta\cup P_\beta$ 的内外以及 $P_a$ 与 $C_\beta$ 的相对位置关系可有以下几种如图 21 所示的不同情形，其它情形可由交换 $b$，$b'$ 而得。



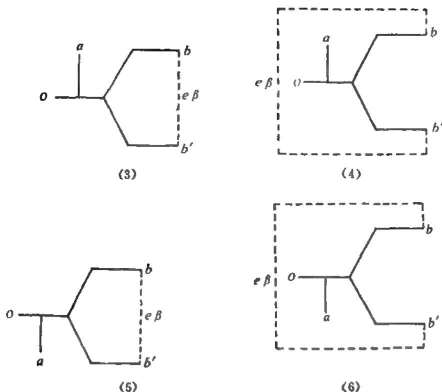



图 21

引入记号

$$f_{\alpha\beta}=f_{ab}+f_{ab'},$$

则依据这些情形可列成下表：

| 情　　形 | $f_{ab}$ | $f_{ab'}$ | $f_{\alpha\beta}$ | 次$_a\tilde{f}(C_\beta)$ | 次$_a\bar{f}(C_\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

（续）

| 情　形 | $f_{ab}$ | $f_{ab'}$ | $f_{a\beta}$ | 次$_a\tilde{f}(C_\beta)$ | 次$_{a'}\tilde{f}(C_\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

上表中 $f_{bb'}=1$。若 $f_{bb'}=0$，则只需将 $f_{ab}$，$f_{ab'}$ 的值互易即可，此外勿须变更。

由表可知，不论何时都有

$$f_{a\beta}=次_a\tilde{f}(C_\beta)+次_o\tilde{f}(C_\beta)。$$

同样有

$$f_{a'\beta}=次_{a'}\tilde{f}(C_\beta)+次_o\tilde{f}(C_\beta)。$$

相加得

$$f_{a\beta}+f_{a'\beta}=次_a\tilde{f}(C_\beta)+次_{a'}\tilde{f}(C_\beta)。$$

由第1节的交截术知，

上式＝交$(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(C_\beta))$＝交$(\tilde{f}(e_\alpha),\tilde{f}(e_\beta))=f_{\alpha\beta}$。

故

$$f_{\alpha\beta}=f_{a\beta}+f_{a'\beta}=f_{ab}+f_{ab'}+f_{a'b}+f_{a'b'}。$$

此即基本关系式。

5．线图嵌入第一基本定理

**问题**　试从 $f:T\subset$平面所定数组$(f_{ij})$求 $f$ 可改变为 $g:T\subset$平面而 $g$ 可扩充为整个 $G$ 的嵌入的充要条件。

**剖析**　任两嵌入 $f$，$g:T\subset$平面的异同可由一数组$(\varepsilon_{ij})$确

定(见II中的树形比嵌术与嵌树术)，此处

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}=f_{ij}+g_{ij}。$$

又对 $g$:$T$⊂平面由第3节扩充术已知 $g$ 可扩充为整个 $G$ 的嵌入的充要条件。由此易得 $f$:$T$⊂平面可改变为 $g$:$T$⊂平面而 $g$ 可扩充为整个 $G$ 的嵌入的充要条件。

详言之，设 $f,g$:$T$⊂平面任意，对 $T$ 的任两自由端 $a,b$，命 $a$，$b$ 到根 $O$ 的通道 $P_a$，$P_b$ 最初相遇的顶点为 $v$。连结 $v$ 与 $a$，$b$ 的通道 $P_{va}$，$P_{vb}$ 上以 $v$ 为前端的树棱设为 $t_i$，$t_j$，则置

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{ij}。$$

又对任两外棱 $e_\alpha=\widehat{aa'}$，$e_\beta=\widehat{bb'}$，置

$$\varepsilon_{a\beta}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{ab'},$$

$$\varepsilon_{\alpha b}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{a'b},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{ab'}+\varepsilon_{a'b}+\varepsilon_{a'b'},$$

则显有

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{ba},$$

$$\varepsilon_{a\beta}=\varepsilon_{\beta a},$$

$$\varepsilon_{\alpha b}=\varepsilon_{b\alpha},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\beta\alpha}=\varepsilon_{a\beta}+\varepsilon_{a'\beta}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{ab'}。$$

由

$$g_{ij}=f_{ij}+\varepsilon_{ij},$$

依据诸符号的意义以及上一节的基本关系术可得

$$g_{ab}=f_{ab}+\varepsilon_{ab},$$

$$g_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta}。$$

因而由扩充术，若 $f$ 可改变为 $g$:$T$⊂平面而 $g$ 可扩充为整个 $G$ 的嵌入，则 $g_{\alpha\beta}=0$，或即

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}。$$

今依第二部第5节引入一组(模2)未知数 $x_{ij}=x_{ji}$，又对任两 $T$ 的自由端 $a$，$b$ 与任两外棱 $e_\alpha=\widehat{aa'}$，$e_\beta=\widehat{bb'}$，置($i,j$ 意义同前)

$$x_{ab}=x_{ij},$$

$$x_{a\beta}=x_{ab}+x_{ab'},$$

$$x_{\alpha b}=x_{ab}+x_{a'b},$$

$$x_{\alpha\beta}=x_{ab}+x_{ab'}+x_{a'b}+x_{a'b'},$$

则显然有

$$x_{ab}=x_{ba},$$

$$x_{a\beta}=x_{\beta a},$$

$$x_{\alpha b}=x_{b\alpha},$$

$$x_{\alpha\beta}=x_{\beta\alpha}=x_{a\beta}+x_{a'\beta}=x_{\alpha b}+x_{\alpha b'}。$$

于是上述 $g:T\subset$平面可扩充为整个 $G$ 的嵌入的条件可表为，$(e_{ij})$应为下方程组

(I)$_f$ $$x_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}$$

的解。又据 II 5 嵌树术，$(e_{ij})$还应满足以下方程组：

(II)$_f$ $$Q_{ijk}(f,x)=1,$$

其中 $Q_{ijk}(f,x)$为一与以同一顶点为前端的三棱组 $t_i$，$t_j$，$t_k$ 相对应的二次式。

反之，若$(e_{ij})$满足这两方程组，则依(II)$_f$与嵌树术可据 $e_{ij}$ 以改变 $f$ 为一嵌入 $g:T\subset$平面使

$$g_{ij}=f_{ij}+e_{ij},$$

其次依(I)$_f$有

$$q_{\alpha\beta}=0。$$

因而由扩充术可将 $g$ 扩充为一整个 $G$ 的嵌入。

综合上述可得出问题的完全解答如下：

**线图嵌入术(第一基本定理)** 对于以任意同一顶点为前端的任两树棱 $t_i$, $t_j$ 引入一模 2 未知数 $x_{ij}=x_{ji}$, 又对 $T$ 的任两自由端 $a$, $b$ 与任两外棱 $e_\alpha$, $e_\beta$ 引入

$$x_{ab}=x_{ij},$$

$$x_{\alpha\beta}=x_{ab}+x_{ab'}+x_{a'b}+x_{a'b'},$$

其中 $t_i$, $t_j$ 为自 $a$, $b$ 至 $O$ 的通道 $P_a$, $P_b$ 上以初次相遇的顶点为前端的两树棱, 而 $e_\alpha=\widehat{aa'}$, $e_\beta=\widehat{bb'}$。对每一对外棱 $e_\alpha$, $e_\beta$ 引入方程

$$(\mathrm{I})_f \qquad x_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta},$$

又对每三以同一顶点为前端的树棱 $t_i$, $t_j$, $t_k$引入方程

$$(\mathrm{II})_f \qquad Q_{ijk}(f,x)=1,$$

此处

$$\begin{aligned}Q_{ijk}(f,x)=&(f_{ij}+x_{ij})(f_{ik}+x_{ik})\\&+(f_{jk}+x_{jk})(f_{ji}+x_{ji})\\&+(f_{ki}+x_{ki})(f_{kj}+x_{kj}),\end{aligned}$$

则 $f:T\subset$平面可改变为 $g:T\subset$平面而 $g$ 可扩充为整个 $G$ 的嵌入的充要条件为方程组$(\mathrm{I})_f$, $(\mathrm{II})_f$ 有解。

简言之有

$$\boxed{G\text{能嵌入平面}\Longleftrightarrow(\mathrm{I})_f,\ (\mathrm{II})_f\text{有解}}$$

这一结论将称为线图嵌入第一基本定理。

若已得$(\mathrm{I})_f$, $(\mathrm{II})_f$ 的一组解答$(x_{ij})=(e_{ij})$, 则视 $e_{ij}=1$ 或 0 而确定是否改变 $t_i$, $t_j$ 的旋向, 即可从 $f$ 得一确定的嵌入 $g:T\subset$平面而 $g$ 可扩充为整个 $G$ 的嵌入, 如扩充术所示。

6。不能嵌入平面的线图实例

**问题** 举出一些不能在平面中嵌入的简单线图。

**Kuratowski 实例。**Kuratowski(波兰数学家)在 1930 年曾举出过两个这样的线图，记作 $K_1$，$K_2$，见图 17，18。我们将依据前面线图嵌入术对 $K_1$，$K_2$ 进行分析并证实 $K_1$ 与 $K_2$ 不能嵌入平面。

先考虑 $K_1$。为此选一最大树 $T$ 并依第 2 节改造 $K_1$ 且作 $f:K_1 \underset{T}{\subset}$ 平面如图 22(参阅图 17)。

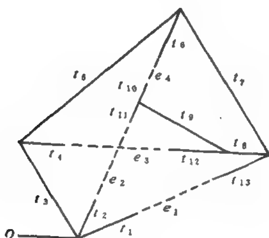



图 22

相当于方程组(I)，有：

$(e_1,e_2)$：$x_{8,13}+x_{23}+x_{13}+x_{12}=0$，

$(e_1,e_3)$：$x_{8,13}+x_{45}=0$，

$(e_2,e_3)$：$x_{9,12}+x_{45}=1$，

$(e_1,e_4)$：$x_{8,13}+x_{67}=0$，

$(e_2,e_4)$：$x_{10,11}+x_{67}=0$，

$(e_3,e_4)$：$x_{9,12}+x_{67}=0$。

易见上述方程组无解，因而 $K_1$ 不能嵌入平面

但若弃去 $e_4$(因而也同时弃去 $t_6, t_{10}$)则对余下的线图 $K'_1$(见图 23)在 $f$ 下的相应方程组$(I)_f$只含有前面三个，这时$(I)_f$显然可解。因$(II)_f$并不存在，故知 $K'_1$ 必可嵌入平面。

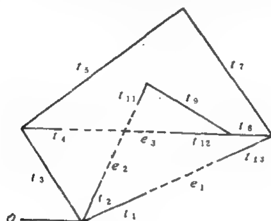



图23

为求得 $K'_1$ 的不同嵌入，可先求得$(I)_f$的一般解答如下：

$$x_{23} + x_{13} + x_{12} = x_{8,13} = x_{45},$$

$$x_{9,12} = x_{45} + 1。$$

无损于一般性，不妨设

$$x_{12} = x_{13} = 0,$$

于是有两组不同解答如下：

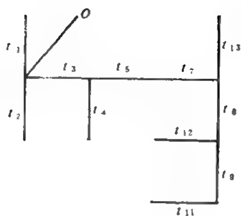
(1) $x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{45} = x_{8,13} = 0$, $x_{9,12} = 1$,

(2) $x_{12} = x_{13} = x_{9,12} = 0$, $x_{23} = x_{45} = x_{8,13} = 1$。

相应的树形嵌入见图 24，25。

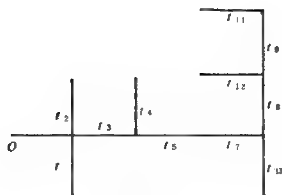
每一树形的嵌入都可扩充为 $K'_1$ 的嵌入，例如在情形(1)，可扩充成四种不同的嵌入如图 26 所示(树根已省去)。

同样，在情形(2)，也可得出四种不同的扩充。与图 26 的



O
$l_1$
$l_3$
$l_5$
$l_7$
$l_{13}$
$l_2$
$l_4$
$l_8$
$l_{12}$
$l_9$
$l_{11}$


图 24



$l_{11}$
$l_9$
$l_{12}$
$l_8$
$l_2$
$l_4$
$l_3$
O
$l_5$
$l_7$
$l$
$l_{13}$


图 25

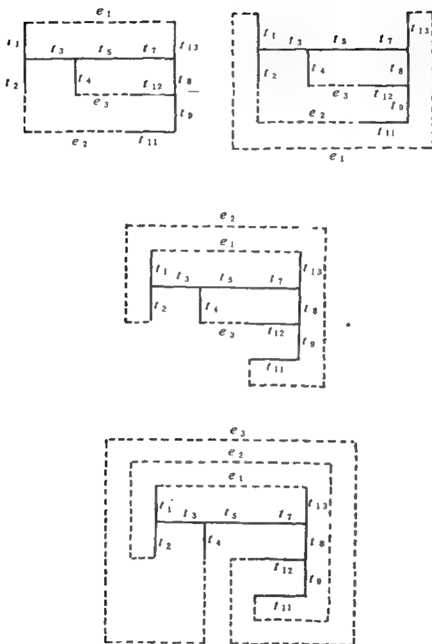


图 26

四种扩充一起共 8 种，概括了 $K'_1$(即 $K_1$ 除去 $e_4$ 后所余 线图)在平面中一切可能的不同嵌入。

其次考虑第二种 Kuratowski 线图 $K_2$(参阅图 18)。为此，取树形 $T$ 并改造 $K_2$ 且 作 $f: K_2 \underset{T}{\subset}$ 平面如图 27。

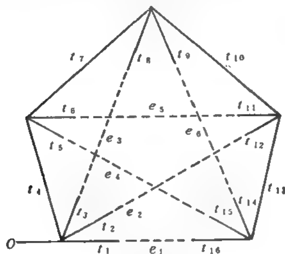



图 27

方程组$(\text{I})_f$ 含有 15 个方程如下：

$(e_1, e_2)$:　　$x_{12}+x_{14}+x_{24}+x_{12,13}=0$,

$(e_1, e_3)$:　　$x_{13}+x_{14}+x_{34}+x_{8,10}=0$,

$(e_2, e_3)$:　　$x_{23}+x_{24}+x_{34}+x_{8,10}=0$,

$(e_1, e_4)$:　　$x_{57}+x_{15,16}=0$,

$(e_2, e_4)$:　　$x_{57}+x_{12,13}=1$,

$(e_3, e_4)$:　　$x_{57}+x_{8,10}=1$,

$(e_1, e_5)$:　　$x_{67}+x_{11,13}=0$,

$(e_2, e_5)$:　　$x_{67}+x_{11,12}=0$,

$(e_3, e_5)$:　　$x_{67}+x_{8,10}=1$,

$(e_4, e_5)$:　　$x_{56}+x_{57}+x_{67}+x_{11,13}=0$,

$(e_1, e_6)$:　　$x_{9,10}+x_{14,16}=0$,

$(e_2, e_6)$:　　$x_{9,10}+x_{12,13}=1$,

$(e_3, e_6)$:　　$x_{89}+x_{8,10}=0$,

$(e_4, e_6)$:　　$x_{9,10}+x_{14,15}=0$,

$(e_5, e_6)$:　　$x_{9,10}+x_{11,13}=1$。

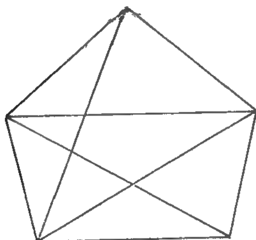


图 28

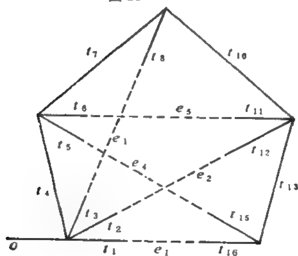



图 29

易见上述方程组无解，因而 $K_2$ 不能嵌入平面。但若弃去 $e_6$（因而也弃去 $t_9,t_{14}$），即易 $K_2$ 为图 28，29 的 $K'_2$，并取最大树 $T'$ 与浸入 $f:K'_2 \underset{T'}{\subset}$ 平面如前，则相应的方程组 $(\mathrm{I})_f$ 系由前面 10 个所组成。易见此时 $(\mathrm{I})_f$ 有解。

无损于一般性，可设

$$x_{12}=x_{13}=x_{14}=0,$$

此时方程组 $(\mathrm{I})_f$ 的一般解答为

$$x_{23}=x_{24}=x_{34}=x_{8,10}=x_{12,13},$$

$$x_{56}=x_{57}=x_{67}=x_{11,12}=x_{11,13}=x_{15,16},$$

$$x_{56}=x_{23}+1_{\circ}$$

对于方程组 $(\mathrm{II})_f$，此时有相应于

$$(i,j,k)=(123),\ (124),\ (134),\ (234),$$

$$(567),\ (11,12,13)$$

等共 6 个方程。注意当 $i<j<k$ 时，由于

$$f_{ij}=f_{ik}=f_{jk}=0,$$

相应方程变为

$$x_{ij}x_{ik}+x_{ij}x_{jk}+x_{ik}x_{jk}+x_{ik}=0_{\circ}$$

不难验证，由于 $(\mathrm{I})_f$ 的解答需采取前面所述形式，诸方程 $(\mathrm{II})_f$ 都自然满足，因之 $K'_2$ 必能嵌入平面。

由此知方程组 $(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$ 的解答实质上只有以下两组（在无损于一般性的假定 $x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$ 下）：

(1) $$x_{12}=x_{13}=x_{14}=x_{23}=x_{24}=x_{34}=x_{8,10}=x_{12,13}=0,$$

$$x_{56}=x_{57}=x_{67}=x_{11,12}=x_{11,13}=x_{15,16}=1_{\circ}$$

(2) $$x_{12}=x_{13}=x_{14}=x_{56}=x_{57}=x_{67}=x_{11,12}=x_{11,13}$$

$$=x_{15,16}=0,$$

$$x_{23}=x_{24}=x_{34}=x_{8,10}=x_{12,13}=1_{\circ}$$

因而 $T'$ 在平面中只有两个不同的嵌入。从这两个 $T'$ 的嵌入不难获得 $K'_2$ 在平面中的所有不同嵌入方法。

不仅 $K_1$，$K_2$ 不能嵌入平面，凡含有 $K_1$ 型或 $K_2$ 型子图的线图都不能嵌入平面，而且 Kuratowski 还证明了其逆，即下述定理(证明从略，可参阅 Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fund. Math., 15(1930) 271—283)。

**Kuratowski 线图嵌入术** 若一线图 $G$ 含有一子图如 $K_1$ 或 $K_2$，例如图 30 中以粗黑线表出的子图即为一 $K_1$ 型线图，则上述 $G$ 显然不能嵌入平面。反之，若 $G$ 不含有任意 $K_1$ 或 $K_2$ 型的子图，则 $G$ 必能嵌入平面，即

| $G$ 能嵌入平面 $\Longleftrightarrow$ $G$ 不含有 $K_1$ 或 $K_2$ 型子图 |
|---|

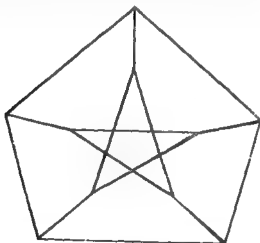


图 30

**7. 线图嵌入第二基本定理**

**问题** Kuratowski 嵌入术给出了一个线图 $G$ 能嵌入平面

的充要条件，但这种判准并不是切实可行的，因为线图比较复杂时，难以判断是否有 $K_1$ 或 $K_2$ 型子图隐藏其中(参阅图 30)。另一方面，第5节5中的线图嵌入术(第一基本定理)给出了另一个切实可行的判准，把判断 $G$ 能否嵌入平面归结为某方程组 $(\mathrm{I})_f$ 与 $(\mathrm{II})_f$ 是否有解答，并可由解答得出具体的具体嵌入方法。但方程组中 $(\mathrm{I})_f$ 是线性的，容易处理，$(\mathrm{II})_f$ 则是二次的，比较难办。试简化方程组以获得较简易的嵌入判准。

**剖析** 由 Kuratowski 嵌入术与实例的注释可知：设 $G$ 中有一 $K_1$ 或 $K_2$ 型的子图 $G'$，在 $G$ 中可选最大树形 $T$ 以 $G'$ 的最大树形 $T'$ 为子树。不妨设 $G$, $G'$ 都已改造使 $T$, $T'$ 具有相同树根。任作 $f:T\subset$平面，并置 $f|T'=f'$，则相应于 $G$, $T$ 与 $f$ 的方程组 $(\mathrm{I})_f$ 含有 $G'$ 相应于 $T'$ 与 $f'$ 的方程组 $(\mathrm{I})_{f'}$ 为其子组。因 $(\mathrm{I})_{f'}$ 无解，故 $(\mathrm{I})_f$ 也无解。由此知，当 $(\mathrm{I})_f$ 有解时，$G$ 必不能含有任一 $K_1$ 或 $K_2$ 型的子图。仍由 Kuratowski 嵌入术知，此时 $G$ 必能嵌入平面。由第一基本定理知此时不仅 $(\mathrm{I})_f$ 有解，且 $(\mathrm{I})_f$, $(\mathrm{II})_f$ 联立起来的方程组也必有解。但需注意，并不是 $(\mathrm{I})_f$ 的任一解答都可作为 $(\mathrm{I})_f$, $(\mathrm{II})_f$ 联立起来的解。

总结上述，有下面的结论：

**线图嵌入术(第二基本定理)** 设线图 $G$，最大树形 $T$ 与树根 $O$ 如前。任作嵌入 $f:T\subset$平面，并作相应方程组

$$(\mathrm{I})_f \qquad x_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta},$$

$$(\mathrm{II})_f \qquad Q_{ijk}(f,x)=1,$$

则

$$\boxed{G\text{能嵌入平面}\Longleftrightarrow(\mathrm{I})_f\text{有解}}$$

由此并知

$$\boxed{(\mathrm{I})_f \text{ 有解} \Longrightarrow (\mathrm{I})_f,\ (\mathrm{II})_f \text{ 有解}}$$

## 四、(平面性)线图的具体嵌入

### 1. 问题说明与方法概述

**问题** 仍设线图$G$与最大树形$T$如前，其中$G$满足第一部分第2节中的限制条件，而$G,T$已改造如第三部分第2节中所述的，树根为$O$。任作嵌入$f:T\subset$平面。从$f$可作两方程组：

$(\mathrm{I})_f$ $\qquad x_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta},$

$(\mathrm{II})_f$ $\qquad Q_{ijk}(f,x)=1$。

由第三部分第7节中线图嵌入术(第二基本定理)已知方程组$(\mathrm{I})_f$有解时，$(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$联立起来的方程组也有解，因而依据第三部分第2节中的线图嵌入术(第一基本定理)，可改变$f$为另一嵌入$g:T\subset$平面并扩充$g$为$G$的一个嵌入。但是，在建立第三部分第7节中结果的过程中须借助于Kuratowski嵌入术，而后者只是一纯理论的结果，并非切实可行，为此提出下面的问题：重新建立第三部分第7节中的线图嵌入术以便在解决上述问题时不依赖于Kuratowski的结果，且从$(\mathrm{I})_f$的一组解答获得$(\mathrm{I})_f$,$(\mathrm{II})_f$的解答时，应该依照确定步骤进行，因而切实可行，即可编成程序使用电子计算机以获得所需解答。

**方法概述** 为了解决上述问题，使得从一个只满足$(\mathrm{I})_f$的解出发能获得一个同时满足$(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$的解，我们将把$f$以及$(\mathrm{I})_f$的解$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$逐步改变某些$\varepsilon_{ij}$的值，使满足$(\mathrm{II})_f$中的方程逐步增多，而改变后的$\varepsilon_{ij}$仍满足$(\mathrm{I})_f$。为此先引入以下的符号与概念。

设有$f:T\subset$平面与数组$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$。$e_\alpha$是一外棱，两端为$a$，$a'$。在树形$T$中，连结$a$，$a'$与树根$O$的通道为$P_a$，$P_{a'}$，连结$a$，$a'$的通道为$P_\alpha$。记$P_a$，$P_{a'}$的公共部分在$P_\alpha$上的顶点为$v_\alpha$，即$P_a\cap P_{a'}=P_{v_\alpha}$。顶点$v_\alpha$将称为$P_\alpha$的歧点（有时也称为$e_\alpha$的歧点），记$P_{v_\alpha}$上以$v_\alpha$为端点的树棱为$t_{v_\alpha}$。

我们称$(f,\varepsilon)$对$e_\alpha$合格，如果以下诸条件满足：

条件(1)对任一不同于$e_\alpha$的外棱$e_\beta$，$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$满足$(\mathrm{I})_f$中与$(e_\alpha,e_\beta)$相应的方程，即有$f_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}$。

条件(2)对以$P_\alpha$上同一不等于$v_\alpha$的顶点为前端的任三树棱$t_i$，$t_j$，$t_k$，若其中之一在$P_\alpha$上，则$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$即满足$(\mathrm{II})_f$中与$(t_i,t_j,t_k)$相应的方程：$Q_{ijk}(f,x)=1$。

条件(3)对以$P_\alpha$上同一顶点$v_\alpha$为前端的任三树棱$t_i$，$t_j$，$t_k$，若其中两个在$P_\alpha$上，则$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$即满足$(\mathrm{II})_f$中与$(t_i,t_j,t_k)$相应的方程：$Q_{ijk}(f,x)=1$。

如果数组$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$又是$(\mathrm{I})_f$的解答且满足上述三条件，则称$\varepsilon$是$f$下对$e_\alpha$的合格解。

于是，我们的方法可概述如下。

将诸外棱排成一适当次序如下：

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_\alpha,\ \cdots,\ e_L,$$

从$f:T\subset$平面以及$(\mathrm{I})_f$的任一解$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$出发，逐步改变为数组

$$\varepsilon^1=(\varepsilon^1_{ij}),\ \varepsilon^2=(\varepsilon^2_{ij}),\ \cdots,\ \varepsilon^\alpha=(\varepsilon^\alpha_{ij}),\ \cdots,\ \varepsilon^L=(\varepsilon^L_{ij}),$$

使每一$\varepsilon^\alpha$都是$(\mathrm{I})_f$的解，而$(f,\varepsilon^1)$对$e_1$合格，$(f,\varepsilon^2)$除对$e_1$合格外，又对$e_2$合格，依此类推，最后，所得$\varepsilon^L=(\varepsilon^L_{ij})$即为同时满足$(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$的一组解答。

**方法的改进** 上述方法中嵌入$f:T\subset$平面是固定的，只是逐

步改变数组 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$ 的值。但在 $f$ 下诸棱的相互位置与 $\varepsilon$ 及其改变之间并无显著关系。为此有必要不仅改变 $\varepsilon$，且改变嵌入 $f$，使改变后的嵌入 $g$ 与数组 $\eta=(\eta_{ij})$ 满足 $(f,\varepsilon)$ 所满足的那些相应的方程，而 $g$ 与 $\eta$ 间却有比较简单直观的相互关系。这可以帮助解决原来的问题。

为此先引入以下的符号与概念。

设将 $f:T\subset$ 平面改变为 $g:T\subset$ 平面。对于 $(\mathrm{I})_f$ 的数组 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$，有 $(\mathrm{I})_g$ 的一个相应数组 $\eta=(\eta_{ij})$ 使

$$\eta_{ij}+g_{ij}=\varepsilon_{ij}+f_{ij}。$$

此时我们简记作

$$(f,\varepsilon)\sim(g,\eta)。$$

注意 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$，$\eta_{ij}=\eta_{ji}$，而 $f_{ij}=f_{ji}+1$，$g_{ij}=g_{ji}+1$。由于对任意外棱 $e_\alpha$，$e_\beta$，依据第三部分第5节引入的 $\varepsilon_{\alpha\beta}$，$\eta_{\alpha\beta}$ 显然满足

$$\eta_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+f_{\alpha\beta},$$

故有以下断言：

设 $(f,\varepsilon)\sim(g,\eta)$。

(1) 若 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$ 是 $(\mathrm{I})_f$ 的解，则 $\eta=(\eta_{ij})$ 也是 $(\mathrm{I})_g$ 的解。

(2) 对以同一顶点为前端的任三树棱 $t_i$，$t_j$，$t_k$，若 $\varepsilon$ 满足 $(\mathrm{II})_f$ 中与 $(t_i,t_j,t_k)$ 相应的方程，则 $\eta$ 也满足 $(\mathrm{II})_g$ 中与 $(t_i,t_j,t_k)$ 相应的方程。

由此不难看出：

(3) 若 $(f,\varepsilon)$ 对某一外棱 $e_\alpha$ 合格，则 $(g,\eta)$ 也对 $e_\alpha$ 合格。

(4) 若 $\varepsilon$ 是 $f$ 下对 $e_\alpha$ 的合格解，则 $\eta$ 也是 $g$ 下对 $e_\alpha$ 的合格解。

由于(1)—(4)，可将原来方法改进为以下更一般的形式：

仍将诸外棱排成一适当次序

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_a,\ \cdots,\ e_L,$$

从 $f:T\subset$平面以及$(\mathrm{I})_f$ 的任一解 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$出发，逐步改变 $f$ 为嵌入

$$g^1,\ g^2,\ \cdots,\ g^a,\ \cdots,\ g^L:T\subset\text{平面},$$

以及 $\varepsilon$ 为数组

$$\eta^1=(\eta^1_{ij}),\ \eta^2=(\eta^2_{ij}),\ \cdots,\ \eta^a=(\eta^a_{ij}),\ \cdots,\ \eta^L=(\eta^L_{ij}),$$

使每一 $\eta^a$ 都是$(\mathrm{I})_{g^a}$的解，而$(g^1,\eta^1)$对 $e_1$ 合格，$(g^2,\eta^2)$除对 $e_1$ 合格外，又对 $e_2$ 合格，依次类推。最后所得 $\eta^L=(\eta^L_{ij})$即为同时满足$(\mathrm{I})_{g^L}$，$(\mathrm{II})_{g^L}$ 的一组解答。作数组 $\varepsilon^L=(\varepsilon^L_{ij})$使

$$(f,\varepsilon^L)\sim(g,\eta^L),$$

则 $\varepsilon^L$ 也是同时满足$(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$ 的一组解答。

以下各节将解释逐次改变嵌入与数组的细节，也将说明诸外棱排成适当次序的方法。

2．旋数的改变

**问题** 上节提出的方法主要在于改变一个数组 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$的值使满足$(\mathrm{II})_f$ 的方程个数越来越多，为此，试检查改变前后的数组对满足$(\mathrm{II})_f$ 与否的影响。

**剖析** 对第二部分第 4 节中的树形比嵌术中从嵌入 $f:T\subset$平面的旋数组$(f_{ij})$改变为另一嵌入的旋数组时，引入了改变值的数组$(\varepsilon_{ij})$。由于对以同一顶点 $v$ 为前端的任三树棱 $t_i,t_j$，$t_k$，数组$(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ik},\varepsilon_{jk})$可取的值有 8 种，而将 $t_i$，$t_j$，$t_k$ 在 $f$ 下的排列次序改变时的方式却只有 6 种，这说明作为旋数改变的$(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ik},\varepsilon_{jk})$三数是不能任意的。其间的制约关系由$(\mathrm{II})_f$ 中的方程

$$Q_{ijk}(f,x)=1$$

表达，即三数须满足这一方程。由这一方程的几何意义容易解

答上述问题。

为此，不妨设在 $f$ 下从 $t_v$ 起依反钟向排列的次序为 $t_v$，$t_i$，$t_j$，$t_k$，于是有下表：

| 改变后反钟向排列次序 | $\varepsilon_{ij}$ | $\varepsilon_{ik}$ | $\varepsilon_{jk}$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $t_v, t_i, t_j, t_k$ | 0 | 0 | 0 |
| $t_v, t_i, t_k, t_j$ | 0 | 0 | 1 |
| $t_v, t_j, t_k, t_i$ | 1 | 1 | 0 |
| $t_v, t_j, t_i, t_k$ | 1 | 0 | 0 |
| $t_v, t_k, t_i, t_j$ | 0 | 1 | 1 |
| $t_v, t_k, t_j, t_i$ | 1 | 1 | 1 |

由表知，$(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ik},\varepsilon_{jk})$不能取的值为$(0,1,0)$与$(1,0,1)$。且知从这两组改变三数中的任意一个或两个，所得新数组即与表中某一确定排列的数组相当。这一结论显然与原先 $f$ 下 $t_v$，$t_i$，$t_j$，$t_k$ 的排列次序无关，因而有下述结论：

**旋数改变术** 设有嵌入 $f:T\subset$平面，数组 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$，以及以同一顶点为前端的三树棱 $t_i$，$t_j$，$t_k$，若三数 $\varepsilon_{ij}$，$\varepsilon_{ik}$，$\varepsilon_{jk}$ 不满足$(\text{II})_f$ 中与$(t_i,t_j,t_k)$相应的方程：$Q_{ijk}(f,x)=1$，则任意改变其中一个或两个的值，新得到的三数 $\varepsilon'_{ij}$，$\varepsilon'_{ik}$，$\varepsilon'_{jk}$ 即能满足这一方程。

3. *树形嵌入的调整*

**问题** 依据第一节中的要求，试将嵌入 $f:T\subset$平面改变为嵌入 $g:T\subset$平面，又相应改变数组 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$为数组 $\eta=(\eta_{ij})$使$(f,\varepsilon)\sim(g,\eta)$而在 $g$ 下 $\eta$ 较为简单易于处理。

**改变方法** 改变将对一确定的外棱 $e_a$ 进行。设 $P_a$ 上以歧点 $v_a$ 为前端的两树棱为 $t_p$，$t_q$。必要时交换 $p$，$q$ 记号，故恒

可假设 $f_{pq}+\varepsilon_{pq}=0$。又简记 $t_{v_\alpha}$ 为 $t_0$。

若 $\varepsilon_{pq}=1$，则改变 $f$ 为 $g$ 时，将交换 $t_p$，$t_q$ 的位置，否则 $t_p$，$t_q$ 的相互位置保持不变。以下设这一步骤已首先完成，故不妨设在 $g$ 下与在 $f$ 下 $t_0$，$t_p$，$t_q$ 都依反钟向排列，于是有

$$g_{pq}=0,\ \eta_{pq}=0。$$

设 $v'$ 为 $P_\alpha$ 上或 $P_{v_\alpha}$ 上任一不同于歧点 $v_\alpha$ 的顶点，$t_r$ 为 $P_\alpha$ 或 $P_{v_\alpha}$ 上以 $v'$ 为前端的树棱，而 $t_k$ 为以 $v'$ 为前端但不在 $P_\alpha$ 或 $P_{v_\alpha}$ 上的任一树棱。若 $\varepsilon_{k_r}=0$，则在 $g$ 下将保持 $f$ 下 $t_k$，$t_r$ 的旋向。否则改变旋向，即从 $f$ 改变为 $g$ 时，$t_k$ 将移置 $t_r$ 的另一侧。于是不论何时都有

$$\eta_{k_r}=0。$$

次设 $t_k$ 为以歧点 $v_\alpha$ 为前端而不同于 $t_p$，$t_q$ 的树棱。若 $t_k$ 在 $f$ 下位于 $t_0$ 与 $t_p$ 之间，即在 $f$ 下依反钟向排列次序为 $t_0(=t_{v_\alpha})$，$t_k$，$t_p$，$t_q$ 时，将改变 $f$ 为 $g$ 使在 $g$ 下 $t_k$ 的位置依次如下：

(1) $(\varepsilon_{kp},\varepsilon_{kq})=(0,0)$ 时，$t_k$ 在 $g$ 下仍在 $t_0$，$t_p$ 之间。

(2) $(\varepsilon_{kp},\varepsilon_{kq})=(1,1)$ 时，$t_k$ 在 $g$ 下位于 $t_0$，$t_q$ 之间。

(3)，(4) $(\varepsilon_{kp},\varepsilon_{kq})=(1,0)$ 或 $(0,1)$ 时，$t_k$ 在 $g$ 下位于 $t_p$，$t_q$ 之间。

参阅附图 31，其中波状线为 $t_k$ 改变后在 $g$ 下的位置。

若 $t_k$ 仍为以歧点 $v_\alpha$ 为前端而不同于 $t_p$，$t_q$ 的树棱，但在 $f$ 下位于 $t_0$ 与 $t_q$ 之间，则改变方法与上相似。若在 $f$ 下位于 $t_p$，$t_q$ 之间，则在 $(\varepsilon_{kp},\varepsilon_{kq})=(0,0)$ 或 $(1,1)$ 时，在 $g$ 下 $t_k$ 仍置于 $t_p$，$t_q$ 之间，而在 $(\varepsilon_{kp},\varepsilon_{kq})=(0,1)$ 或 $(1,0)$ 时，$t_k$ 将依次移置 $t_0$，$t_q$ 与 $t_0$，$t_p$ 之间。

最后，设顶点 $v'$ 既不在 $P_\alpha$ 上也不在 $P_{v_\alpha}$ 上，则以 $v'$ 为前

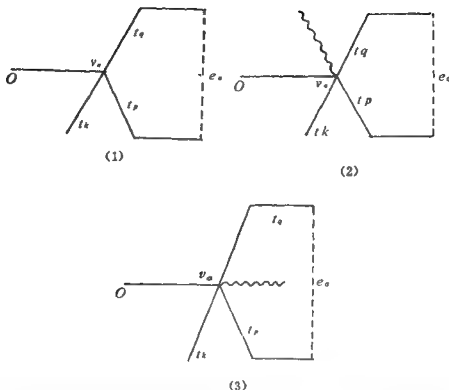



图 31

端的诸棱间的旋向将保持不变，即对任两以 $v'$ 为前端的树棱 $t_i$, $t_j$, 有

$$g_{ij}=f_{ij},\quad \eta_{ij}=e_{ij}。$$

由于对以 $P_a$ 或 $P_{va}$ 上顶点为前端而不在 $P_a$ 与 $P_{va}$ 上的任两树棱，其相互位置改变与否除已可归结为以上改变者外并无明确规定，故依据以上诸规则所得嵌入 $g$ 不必是唯一的，但任一这样改变所得的 $(g,\eta)$ 都将称为 $(f,e)$ 对 $e_a$ 的一个**调整**，简记为

$$(f,e)\xrightarrow[e_a]{\sim}(g,\eta)。$$

易见经嵌入调整所得 $g$，$\eta$ 具有以下简单特征。

**嵌入调整术** 设 $(f,\varepsilon)\underset{e_a}{\rightsquigarrow}(g,\eta)$，则：

(1) 若 $v'$ 是 $P_a$ 或 $P_{v_a}$ 上$\ne$歧点 $v_a$ 的顶点，$t_r$ 是 $P_a$ 或 $P_{v_a}$ 上以 $v'$ 为前端的树棱，而 $t_k$ 为以 $v'$ 为前端的另一树棱，则

$$\eta_{kr}=0。$$

(2) 若 $t_p$，$t_q$ 是 $P_a$ 上以 $v_a$ 为前端的两树棱，而 $t_{v_a}$，$t_p$，$t_q$ 在 $g$ 下依反钟向排列，则

$$\eta_{pq}=0。$$

(3) 若 $t_p$，$t_q$ 如前，而 $t_k$ 为以 $v_a$ 为前端而不同于 $t_p$，$t_q$ 的任一树棱，则：

在 $g$ 下 $t_k$ 位于 $t_0$，$t_p$ 或 $t_0$，$t_q$ 之间时，都有

$$\eta_{kp}=\eta_{kq}=0。$$

在 $g$ 下 $t_k$ 位于 $t_p$，$t_q$ 之间时，或

$$\eta_{kp}=\eta_{kq}=0$$

或

$$\eta_{kp}=\eta_{kq}=1。$$

(4) 在(3)中除最后情形外，$\eta_{kp}$，$\eta_{kq}$，$\eta_{pq}$ 三数都满足 $(\mathrm{II})_g$ 中与 $(t_k,t_p,t_q)$ 相应的方程，亦即原来数组 $\varepsilon=(e_{ij})$ 满足 $(\mathrm{II})_f$ 中与 $(t_k,t_p,t_q)$ 相应的方程。

(5) 若 $e_a=\widehat{aa'}$，$b$ 是 $T$ 的任一不同于 $a$，$a'$ 的自由端，则由(1)—(4)得，$\eta_{ab}=\eta_{a'b}=0$ 或 $\eta_{ab}=\eta_{a'b}=1$，而后者只在 $P_b$ 通过 $v_a$ 且在 $g$ 下 $t_p$，$t_q$ 为 $P_b$ 所隔开的情形下始能出现。因而不论何时都有

$$\eta_{ib}=0。$$

(6) 由(5)知，对任一不同于 $e_a$ 的外棱 $e_\beta$，都有

$$\eta_{\alpha\beta}=0。$$

4。方程组$(\mathrm{I})_f$解答的调整

**问题** 设有$f:T\subset$平面，$(\mathrm{I})_f$的解$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$，以及外棱$e_\alpha$，求将$\varepsilon$改变为数组$\varepsilon'=(\varepsilon'_{ij})$，使$(f,\varepsilon')$对$e_\alpha$合格，且$\varepsilon'$仍满足方程组$(\mathrm{I})_f$，因而$\varepsilon'$为$f$下对$e_\alpha$的合格解。

**数组调整术** 依以下规则可将数组$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$改变为数组$\varepsilon'=(\varepsilon'_{ij})$，使$\varepsilon$是$(\mathrm{I})_f$的解答时，$\varepsilon'$为$f$下对$e_\alpha$的合格解。

规则(1) 设$v'$为$P_\alpha$上任一不同于歧点$v_\alpha$的顶点，$t_r$为$P_\alpha$上以$v'$为前端的树棱，$t_i$，$t_j$为以$v'$为前端而不同于$t_r$的任两树棱，若$\varepsilon$不满足$(\mathrm{II})_f$中与$(t_r,t_i,t_j)$相应的方程，则改变$\varepsilon_{ij}$的值为

$$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}+1。$$

否则置

$$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}。$$

此外，又置

$$\varepsilon'_{ir}=\varepsilon_{ir}，\ \varepsilon'_{jr}=\varepsilon_{jr}。$$

规则(2) 设$t_p$，$t_q$为$P_\alpha$上以歧点$v_\alpha$为前端的两树棱，$t_k$为以$v_\alpha$为前端而不同于$t_p$，$t_q$的任一树棱。若$\varepsilon$不满足$(\mathrm{II})_f$中与$(t_k,t_p,t_q)$相应的方程，则改变$\varepsilon_{kp}$，$\varepsilon_{kq}$为

$$\varepsilon'_{kp}=\varepsilon_{kp}+1，\ \varepsilon'_{kq}=\varepsilon_{kq}+1。$$

否则仍置

$$\varepsilon'_{kp}=\varepsilon_{kp}，\ \varepsilon'_{kq}=\varepsilon_{kq}。$$

此外，又置

$$\varepsilon'_{pq}=\varepsilon_{pq}。$$

规则(3) 设$t_p$，$t_q$如规则2，而$t_i$，$t_j$为以$v_\alpha$为前端而不同于$t_p$，$t_q$的任两树棱。若$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$恰能满足$(\mathrm{II})_f$中与

$(t_i,t_j,t_p)$，$(t_i,t_j,t_q)$相应的两方程之一，则改变 $\varepsilon_{ij}$ 为

$$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}+1。$$

否则置

$$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}。$$

规则(4) 设 $t_i$，$t_j$ 为以不在 $P_\alpha$ 上的同一顶点为前端的任两树梭，则置

$$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}。$$

以上由数组 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$依据规则 1—4 改变为数组 $\varepsilon'=(\varepsilon'_{ij})$的方法称为在 $f$ 下对 $e_\alpha$ 的数组调整，简记为

$$(f,\varepsilon)\xrightarrow[e_\alpha]{}(f,\varepsilon')。$$

在 $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$是$(\mathrm{I})_f$ 的解答时，如此所得数组 $\varepsilon'=(\varepsilon'_{ij})$即为 $f$ 下对 $e_\alpha$ 的一个合格解。

注析。为验证术文中的结论，先改变$(f,\varepsilon)$为较易处理的嵌入 $g$ 与数组 $\eta$，即依嵌入调整术作

$$(f,\varepsilon)\xrightarrow[e_\alpha]{\simeq}(g,\eta)。$$

命 $\eta'=(\eta'_{ij})$为 $f$ 改变为 $g$ 时与 $\varepsilon'$ 相应的数组，即

$$(f,\varepsilon')\sim(g,\eta')，$$

于是 $\eta'$ 是 $\eta$ 在 $g$ 下对 $e_\alpha$ 的数组调整，即

$$(g,\eta)\xrightarrow[e_\alpha]{}(g,\eta')。$$

而与术文中由 $\varepsilon$ 改变为 $\varepsilon'$ 的诸规则相应，$\eta$ 改变为 $\eta'$ 所遵循的规则可重述如下：

规则(1′) 设 $v'$ 为 $P_\alpha$ 上任一不同于 $v_\alpha$ 的顶点，$t_r$ 为 $P_\alpha$ 上以 $v'$ 为前端的树梭，$t_i$，$t_j$ 为以 $v'$ 为前端的任两不同于 $t_r$ 的树梭。若 $\eta$ 不满足$(\mathrm{II})_g$ 中与$(t_r,t_i,t_j)$相应的方程，即 $t_i$，$t_j$ 在

$g$ 下位于 $t_r$ 的两侧，且 $\eta_{ij}=1$，则改变 $\eta_{ij}$ 的值为

$$\eta'_{ij}=\eta_{ij}+1。$$

否则置

$$\eta'_{ij}=\eta_{ij}。$$

此外，又置

$$\eta'_{ir}=\eta_{ir}，\ \eta'_{jr}=\eta_{jr}，$$

即

$$\eta'_{ir}=0，\ \eta'_{jr}=0。$$

规则(2′) 设 $t_p$，$t_q$ 为 $P_a$ 上以歧点 $v_a$ 为前端的两树棱，而在 $g$ 下 $t_0(=t_{v_0})$，$t_p$，$t_q$ 依反钟向排列，$t_k$ 为以 $v_a$ 为前端而不同于 $t_p$，$t_q$ 的任一树棱。若 $\eta$ 不满足$(\mathrm{II})_g$ 中 与$(t_k,t_p,t_q)$相应的方程，即 $t_k$ 在 $g$ 下位于 $P_a$ 的与$O$不同 的 一侧，且 $\eta_{kp}=\eta_{kq}=1$，则改变 $\eta_{kp}$，$\eta_{kq}$ 为

$$\eta'_{kp}=\eta_{kp}+1，\ \eta'_{kq}=\eta_{kq}+1。$$

否则仍置

$$\eta'_{kp}=\eta_{kp}，\ \eta'_{kq}=\eta_{kq}。$$

此外，又置

$$\eta'_{pq}=\eta_{pq}，$$

即

$$\eta'_{pq}=0。$$

规则(3′) 设 $t_p$，$t_q$ 如规则(2′)，而 $t_i$，$t_j$ 为以 $v_a$ 为 前 端但不同于 $t_p$，$t_q$ 的任两 树 棱，若 $\eta=(\eta_{ij})$恰 能 满 足$(\mathrm{II})_g$ 中$(t_i,t_j,t_p)$，$(t_i,t_j,t_q)$相应的两方程之一，即有下 两情形 之 一，则改变 $\eta_{ij}$ 为

$$\eta'_{ij}=\eta_{ij}+1。$$

否则置

$$\eta'_{ij} = \eta_{ij}。$$

两情形如下：

① $t_i$，$t_j$ 在 $g$ 下位于 $t_p$，$t_q$ 之间，或

$$\eta_{ip} = \eta_{iq} = 1，\ \eta_{jp} = \eta_{jq} = 0，$$

或

$$\eta_{ip} = \eta_{iq} = 0，\ \eta_{jp} = \eta_{jq} = 1。$$

② $t_i$，$t_j$ 在 $g$ 下与 $t_p$，$t_q$ 相隔离，且有

$$\eta_{ij} = 1。$$

规则(4′) 设 $t_i$，$t_j$ 为以不在 $P_a$ 上的同一顶点为前端的任两树棱，则置

$$\eta'_{ij} = \eta_{ij}。$$

根据 $g$，$\eta$，$\eta'$ 的作法不难验证以下诸简单性质：

性质(1) 以 $P_a$ 或 $P_{va}$ 上同一顶点为前端的任两树棱 $t_i$，$t_j$，只需至少有一在 $P_a$ 或 $P_{va}$ 上，即有

$$\eta'_{ij} = 0。$$

性质(2) 设 $T$ 的两自由端 $c$，$d$ 在 $g$ 下位于 $P_a$ 的异侧，则必有

$$\eta'_{cd} = 0。$$

性质(3) 设 $T$ 的两自由端 $c$，$d$ 与树根 $O$ 在 $g$ 下都位于 $P_a$ 的同侧，则必有

$$\eta'_{cd} = \eta_{cd}。$$

性质(4) 设自 $T$ 的两自由端 $c$，$d$ 至树根 $O$ 的通道 $P_c$，$P_d$ 首次相遇的顶点不在 $P_a$ 上，则必有

$$\eta'_{cd} = \eta_{cd}。$$

性质(5) 设树棱 $t_i$，$t_j$，$t_k$ 均以 $v_a$ 为前端，且三者或为 $t_p$，$t_q$，或在 $g$ 下位于 $P_a$ 的与 $O$ 不同的一侧，则在($\eta'_{ij}$，$\eta'_{ik}$，

$\eta'_{jk}$)三数中与相应三数($\eta_{ij},\eta_{ik},\eta_{jk}$)不相等的个数或为 0，或为 2。

今设 $\varepsilon$ 是$(\mathrm{I})_f$ 的解，验证$(f,\varepsilon')$对 $e_\alpha$ 合格如下。

首先，依据第 2 节旋数改变术以及改变 $\varepsilon$ 为 $\varepsilon'$ 的规则(1)—(3)，可见$(f,\varepsilon')$满足对 $e_\alpha$ 合格的条件(2)与(3)。

为验证$(f,\varepsilon')$也满足对 $e_\alpha$ 合格的条件(1)。可注意依第 3 节中的嵌入调整术，对任一不同于 $e_\alpha$ 的外棱 $e_\beta$ 有 $\eta_{\alpha\beta}=0$。由于 $\varepsilon$ 是$(\mathrm{I})_f$ 的解，而$(f,\varepsilon)\sim(g,\eta)$，故 $\eta$ 也是$(\mathrm{I})_g$ 的解，特别需满足$(\mathrm{I})_g$ 中与$(e_\alpha,e_\beta)$相应的方程，故有 $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}=0$。由关于$(g,\eta,\eta')$的性质 1，显然有($e_\beta=\widehat{bb'}$)：

$$\eta'_{ab}=\eta'_{a'b}=\eta'_{ab'}=\eta'_{a'b'}=0,$$

故 $\eta'_{\alpha\beta}=0$。因而 $g_{\alpha\beta}=0$ 也可写成 $g_{\alpha\beta}=\eta'_{\alpha\beta}$，即 $\eta'$ 满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\alpha,e_\beta)$相应的方程。于是 $\varepsilon'$ 也满足$(\mathrm{I})_f$ 中与$(e_\alpha,e_\beta)$相应的方程，即$(f,\varepsilon')$满足对 $e_\alpha$ 合格的条件 1。

由以上验证并知：若 $\varepsilon$ 是$(\mathrm{I})_f$ 的解或 $\eta$ 是$(\mathrm{I})_g$ 的解，则$(g,\eta,\eta')$还具有以下性质。

性质(6) 对任一不同于 $e_\alpha$ 的外棱 $e_\beta$，有

$$g_{\alpha\beta}=\eta'_{\alpha\beta}=0,$$

因而 $e_\beta$ 的两端在 $g$ 下必位于 $P_\alpha$ 的同侧。

我们称从$(f,\varepsilon)$依据嵌入调整术获得的嵌入 $g$ 以及任一数组 $\eta'=(\eta'_{ij})$对 $e_\alpha$ 简单合格，如果 $\eta'$ 对 $e_\alpha$ 合格且满足前面性质(1)，(2)与(6)，特别是在 $\varepsilon$ 满足方程组$(\mathrm{I})_f$ 时，嵌入 $g$ 以及由诸规则(1′)—(4′)所得数组 $\eta'$ 对 $e_\alpha$ 简单合格。

术文中 $\varepsilon$ 满足$(\mathrm{I})_f$ 时$(f,\varepsilon)$对 $e_\alpha$ 合格这一部分已验证完毕。其次，需再验证在 $\varepsilon$ 满足$(\mathrm{I})_f$ 时 $\varepsilon'$ 也满足$(\mathrm{I})_f$。或只需再验证在 $\eta$ 满足$(\mathrm{I})_g$ 时 $\eta'$ 也满足$(\mathrm{I})_g$，即对任两外棱 $e_\beta$，$e_\gamma$，

$\eta'$必满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\beta,e_\gamma)$相应的方程。

在$e_\beta$，$e_\gamma$中有一为$e_\alpha$时，已知这一结论成立，故可设$e_\beta$，$e_\gamma$都不同于$e_\alpha$。以下就各种不同情形分别讨论之。

（1）设$e_\beta$，$e_\gamma$中有一，例如$e_\beta$，其歧点$v_\beta$不在$P_\alpha$上也不在$P_{v_\alpha}$上。命$e_\beta$的两端为$b$与$b'$：$e_\beta=\widehat{bb'}$，而$c$为$T$的任一不同于$b$，$b'$的自由端，则当$P_c$不经过$v_\beta$时，显然有

$$\eta_{bc}=\eta_{b'c},\quad \eta'_{bc}=\eta'_{b'c}。$$

当$P_c$经过$v_\beta$时，$b,b'$，$c$必都在$P_\alpha$同侧，故由关于$(g,\eta,\eta')$的性质3有

$$\eta'_{bc}=\eta_{bc},\quad \eta'_{b'c}=\eta_{b'c}。$$

不论何时都有$\eta'_{\beta c}=\eta_{\beta c}$，因而

$$\eta'_{\beta\gamma}=\eta_{\beta\gamma}。$$

由于$\eta$满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\beta,e_\gamma)$相应的方程，即有$g_{\beta\gamma}=\eta_{\beta\gamma}$，故$g_{\beta\gamma}=\eta'_{\beta\gamma}$，即$\eta'$也满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\beta,e_\gamma)$相应的方程。

（2）设$e_\beta$，$e_\gamma$中有一，例如$e_\beta$，其两端$b$，$b'$在$g$下与树根$O$都位于$P_\alpha$的同侧，则当$e_\gamma$的两端$c$，$c'$在$g$下与$O$位于$P_\alpha$的同侧时，由$(g,\eta,\eta')$的性质3有

$$\eta'_{bc}=\eta_{bc},\quad \eta'_{bc'}=\eta_{bc'},\quad \eta'_{b'c}=\eta_{b'c},\quad \eta'_{b'c'}=\eta_{b'c'},$$

故$\eta'_{\beta\gamma}=\eta_{\beta\gamma}$。与(1)相同，知$\eta'$满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\beta,e_\gamma)$相应的方程。反之，当$c$，$c'$在$g$下与$O$位于$P_\alpha$的异侧时，由关于$(g,\eta,\eta')$的性质(2)，有

$$\eta'_{bc}=\eta'_{bc'}=\eta'_{b'c}=\eta'_{b'c'}=0。$$

因而$\eta'_{\beta\gamma}=0$。另一方面，又显然有$g_{\beta\gamma}=0$，故$g_{\beta\gamma}=\eta'_{\beta\gamma}(=0)$，即$\eta'$仍满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\beta,e_\gamma)$相应的方程。

（3）设$e_\beta$，$e_\gamma$诸端点在$g$下都位于$P_\alpha$的与$O$不同的一侧，且$P_\beta$，$P_\gamma$的歧点都在$P_\alpha$上，又设歧点之一，例如$v_\beta\neq v_\alpha$。

命 $e_\beta=\widehat{bb'}$，$e_\gamma=\widehat{cc'}$，易见或

$$\eta'_{bc}=\eta_{bc},\quad \eta'_{b'c}=\eta_{b'c},$$

或

$$\eta'_{bc}=\eta'_{b'c},\quad \eta_{bc}=\eta_{b'c},$$

因而不论何时都有 $\eta'_{\beta c}=\eta_{\beta c}$。同样 $\eta'_{\beta c'}=\eta_{\beta c'}$，故 $\eta'_{\beta\gamma}=\eta_{\beta\gamma}$。与(1)相同，知 $\eta'$ 仍满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\beta,e_\gamma)$相应的方程。

(4) 最后设 $e_\beta=\widehat{bb'}$，$e_\gamma=\widehat{cc'}$ 的诸端点在 $g$ 下仍位于 $P_a$ 的与$O$不同的一侧，但 $P_\beta$，$P_\gamma$ 的歧点都在 $v_a$ 处：$v_\beta=v_\gamma=v_a$。若自 $b$，$c$ 至$O$的通道首次相遇的顶点不在 $v_a$ 处，则由关于$(g,\eta,\eta')$的性质(1)，(4)，有

$$\eta'_{bc}=\eta_{bc}\quad \eta'_{b'c}=\eta'_{bb'},\quad \eta_{b'c}=\eta_{bb'}。$$

因而有

$$\eta'_{bc}+\eta'_{b'c}+\eta'_{bb'}=\eta_{bc}+\eta_{b'c}+\eta_{bb'}。$$

自 $b'$，$c$ 至$O$的通道首次相遇的顶点不在 $v_a$ 时也同样。若自 $b$，$c$ 至$O$以及自 $b'$，$c$ 至$O$的通道首次相遇的顶点都是 $v_a$，则由性质 5，仍得上式。同样不论何时都有

$$\eta'_{bc'}+\eta'_{b'c'}+\eta'_{bb'}=\eta_{bc'}+\eta_{b'c'}+\eta_{bb'}。$$

二式相加即得

$$\eta'_{\beta\gamma}=\eta_{\beta\gamma}。$$

于是与(1)同样知 $\eta'$ 仍满足$(\mathrm{I})_g$中与$(e_\beta,e_\gamma)$相应的方程。

至此，已知在各种情形下 $\eta'=(\eta'_{ij})$ 都满足$(\mathrm{I})_g$中所有方程，调整术验证完毕。

**5. 线图嵌入第三基本定理**

**问题** 上节数组调整术给出了从任一$(\mathrm{I})_f$的解答$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$改变成对一固定外棱 $e_a$ 合格解的方法。在应用第一节中的方法从 $\varepsilon$ 获得同时满足$(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$的解答时，关键的一点在于诸

外棱需排列成一适当次序，使依调整术逐次改变数组时，对先前诸棱的合格性不致因新的改变而丧失。试求这种能符合要求的适当排列次序。

剖析　为求得适当的外棱排列次序，需先就对两个外棱处于较简单关系的情况下，调整对合格性的影响并进行较细致的分析。为此考虑外棱 $e_\alpha, e_\beta$，与 $P_\alpha$，$P_\beta$ 的歧点 $v_\alpha$，$v_\beta$。假设下两条件能满足：

(1) $v_\alpha$ 在通道 $P_{v\beta}$ 上。

(2) $P_\beta$ 与 $P_\alpha$ 至少有一树棱公共。

今设已知嵌入 $g:T\subset$ 平面 与 $(\mathrm{I})_g$ 的解 $\eta=(\eta_{ij})$ 对 $e_\alpha$ 简单合格，试考虑依调整术

$$(g,\eta)\underset{e_\beta}{\rightsquigarrow}(h,\zeta)\underset{e_\beta}{\longrightarrow}(h,\zeta')$$

以获得对 $e_\beta$ 简单合格的嵌入 $h:T\subset$ 平面与数组 $\zeta'=(\zeta'_{ij})$ 时对 $e_\alpha$ 合格性的影响。

由于 $P_\alpha$，$P_\beta$ 至少有一树棱公共，且 $(g,\eta)$ 对 $e_\alpha$ 简单合格，可知依据嵌入调整术以获得 $h$ 时，交换 $g$ 下 $P_\beta$ 上以 $v_\beta$ 为前端的两树棱位置这一步是不必要的。

以下将对嵌入与数组的各改变步骤逐一检查，注意只有下面两种改变可能引起丧失对 $e_\alpha$ 的合格性：

(1) 顶点 $w$ 在 $P_\alpha$ 或 $P_{v\alpha}$ 上，树棱 $t_k$ 以 $w$ 为前端而不在 $P_\alpha$ 或 $P_{v\alpha}$ 上，由 $g$ 调整为 $h$ 时，$t_k$ 在 $g$ 下对 $P_\alpha$ 或 $P_{v\alpha}$ 所位侧向的改变。

(2) 顶点 $w$ 在 $P_\alpha$ 上，树棱 $t_i$，$t_j$ 以 $w$ 为前端，由 $\zeta$ 调整为 $\zeta'$ 时，$\zeta_{ij}$ 的改变。

下面检查这两种改变的影响。

(1)′ 因$(g,\eta)$已对$e_\alpha$简单合格，故对前端在$P_\alpha$或$P_{v_\alpha}$上的任一树棱$t_k$，$t_k$在$g$下位于$P_\alpha$的某一侧时，在$h$下仍将保持在这一侧。

(2)′ 从上节数据调整术的注析中，关于$(g,\eta,\eta')$的性质6已知$e_\beta$的两端在$g$下，因而也在$h$下，必须位于$P_\alpha$的同侧。又知$(g,\eta)$对$e_\alpha$简单合格，故对前端$w$同在$P_\alpha$上的任两树棱$t_i$，$t_j$，在必须改变$\zeta_{ij}$为$\zeta_{ij}=\zeta_{ij}+1$时，应有：

$w=P_\alpha$，$P_\beta$公共部分的两端之一；

$t_i$，$t_j$与$e_\beta$两端在$h$下位于$P_\alpha$同侧；

$t_i$，$t_j$在$h$下位于$P_\beta$的异侧；

$\zeta_{ij}=1$。

由以上分析易见，所得$(h,\zeta')$不仅对$e_\beta$简单合格，且对$e_\alpha$也依然保持简单合格。

同样可知，设$e_\alpha$，$e_\beta$如前，而对另一外棱$e_\gamma$，$P_\gamma$的歧点不在$P_\beta$上而原来$(g,\eta)$对$e_\gamma$简单合格，则$(h,\zeta')$也依然对$e_\gamma$简单合格。

由此易得排列诸外棱的一种合适方法，以为第一节中所说改进方法之用。

由第一部分第2节中关于线图$G$的限制，可将诸外棱$e_\alpha$排成次序

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_\alpha,\ \cdots,\ e_L,$$

使对每一外棱$e_\alpha$，$\alpha>1$，有下二性质：

(1) $P_\alpha$至少与$\beta<\alpha$的某一$P_\beta$有一树棱公共。

(2) 若外棱$e_\beta$的歧点$v_\beta$在$P_{v_\alpha}$上且$\neq v_\alpha$，则$e_\beta$必已出现于$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_{\alpha-1}$中。

今从嵌入$f:T\subset$平面与满足$(1)_f$的解答$\varepsilon=(e_{ij})$出发，依

据嵌入调整术与数组调整术逐步改变$(f,\varepsilon)$为：

$$(f,\varepsilon)\xrightarrow[e_1]{}(g^1,\eta^1)\sim(f,\varepsilon^1),$$

$$(g^1,\eta^1)\xrightarrow[e_2]{}(g^2,\eta^2)\sim(f,\varepsilon^2),$$

……………………………………

$$(g^{L-1},\eta^{L-1})\xrightarrow[e_L]{}(g^L,\eta^L)\sim(f,\varepsilon^L)。$$

于是，最后所得$\varepsilon^L$同时满足$(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$两方程组。

这给出了线图嵌入第二基本定理的又一证明，而这一证明不仅不再依赖于 Kuratowski 嵌入术，而且由于每一$\varepsilon^\alpha$都系在$f$下从$\varepsilon^{\alpha-1}(\varepsilon^0=\varepsilon)$依数据调整术中规则(1)—(4)获得，因而切实可行，不难使之机器化。因之可将以前的嵌入术加强成下面形式。

**线图具体嵌入术**(**第三基本定理**)设有线图$G$，最大树形$T$如前，任作嵌入$f:T\subset$平面，设$\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$是方程组

$$(\mathrm{I})_f\qquad\qquad x_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}$$

的任一解答，则可将诸外棱$e_\alpha$排列成一适当次序

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_\alpha,\ \cdots,\ e_L,$$

并可作数组

$$\varepsilon^1=(\varepsilon^1_{ij}),\ \varepsilon^2=(\varepsilon^2_{ij}),\ \cdots,\ \varepsilon^\alpha=(\varepsilon^\alpha_{ij}),\ \cdots,\ \varepsilon^L=(\varepsilon^L_{ij}),$$

使每一$\varepsilon^\alpha$在$f$下对$e_1,\cdots,e_\alpha$都合格，且$\varepsilon^\alpha$从$(f,\varepsilon^{\alpha-1})$依数组调整术中诸规则获得$(\varepsilon^0=\varepsilon)$。特别有：数组$\varepsilon^L=(\varepsilon^L_{ij})$不仅满足$(\mathrm{I})_f$且同时满足$(\mathrm{II})_f$，因而从$\varepsilon^L$可依第三部分第5节中线图嵌入第一基本定理具体作出整个线图$G$的嵌入：

$$g:G\subset平面。$$

# 五、(平面性)线图嵌入的分类

1. 树形嵌入的扩充

**问题** 在第二部分第5节的嵌树术中，解决了树形嵌入的分类问题。在第三部分第3节扩充术与第三部分第5节，第四部分第7节的线图嵌入术中，解决了一个线图$G$的最大树形$T$应如何嵌入才有可能扩充到整个线图$G$的嵌入的问题。但是，当已有嵌入$g:T\subset$平面并知$g$可扩充为$G$的嵌入时，这种扩充的方法仍可不止一种。在第三部分第1节交截数以及第三部分第6节诸节中，已有例说明此事，见图12与26。这些事例导致下面的问题：

设$g:T\subset$平面可扩充为$G$的嵌入，问如何区别并完全定出各种不同的扩充类型。

**剖析** 已有嵌入$g:T\subset$平面而要扩充到某一外棱$e_\alpha$，显然有两种可能方法，视嵌入后$e_\alpha\cup P_\alpha=C_\alpha$含树根于其内部或外部而定。为此我们对每一外棱$e_\alpha$引入一模2数$u_\alpha$以表示$e_\alpha$的嵌入方式：

$$u_\alpha=\begin{cases}0, & e_\alpha\text{ 嵌入后使树根在 }C_\alpha\text{ 之外},\\ 1, & e_\alpha\text{ 嵌入后使树根在 }C_\alpha\text{ 之内}。\end{cases}$$

每一个扩充到$G$的嵌入都有一确定的数组$(u_\alpha)$与之对应，但并不是任意一个数组都有一相应的扩充。例如在图26的例中(树根位于$t_1,t_3$之间，未在图中标出)，$(u_1,u_2,u_3)$所能取的值只能是

$$(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1),\ (0,0,0)$$

四种，而不能取另外的四种。其原因是：当一外棱$e_\alpha$已嵌入

而再要嵌入另一外棱 $e_\beta$ 时，其方式可能有两种，也可能只有一种。例如图 26 中，若 $e_1$ 已嵌入使 $u_1=1$，则再嵌入 $e_2$ 时有两种方式使 $u_2=0$ 或 1，其次在 $e_1$，$e_2$ 已嵌入使 $u_1=1$，$u_2=1$ 再嵌入 $e_3$ 时可有两种方式使 $u_3=0$ 或 1。但若 $e_1$，$e_2$ 已嵌入使 $u_1=1$，$u_2=0$，则再嵌入 $e_3$ 时，只能再有一种方式，即 $u_3=0$。

这说明对任两外棱 $e_\alpha$，$e_\beta$ 来说，$u_\alpha$，$u_\beta$ 的取值是不能任意的，数组$(u_\alpha)$的取值更不能任意。由此可知，为解决原来的问题，首先应求得对任两外棱 $e_\alpha$，$e_\beta$ 来说，数 $u_\alpha$ 与 $u_\beta$ 之间的制约关系。

为此，记 $e_\alpha$ 的两端为 $a$，$a'$，$e_\beta$ 的两端为 $b$，$b'$。由于已知 $g:T\subset$平面可扩充为$G$的嵌入，故由第三部分第 3 节扩充术知

$$g_{\alpha\beta}=0。$$

因而若 $e_\alpha$ 已嵌入平面，则 $b$，$b'$ 将同在 $C_\alpha=e_\alpha\cup P_\alpha$ 之内或同在其外。同样，若 $e_\beta$ 已嵌入平面，则 $a$，$a'$ 也将同在 $C_\beta=e_\beta\cup P_\beta$ 之内或同在其外。又

$$g_{a\beta}=0 \text{ 或 } 1$$

视 $a$ 与树根在 $g$ 下位于 $P_\beta$ 同侧或异侧而定。在 $g$ 扩充至 $e_\alpha$ 后，则视是否同在 $C_\beta$ 之内外或一在内而另一在外而定。故其值与嵌入 $g:T\subset$平面有关而与 $g$ 的扩充无关。对 $g_{ba}$ 亦然。由这些几何意义可知，应有

$$g_{a\beta}g_{ba}=0,$$

即 $g_{a\beta}$，$g_{ba}$ 不能同时为 1。

今任将 $g:T\subset$平面扩充为$G$的一个嵌入，则就 $C_\alpha$，$C_\beta$ 以及根的相互内外位置关系而言可概括为图 32 中的 9 种类型

(实际嵌入都可归入这些类型之中，只是某些点线可能重合)。

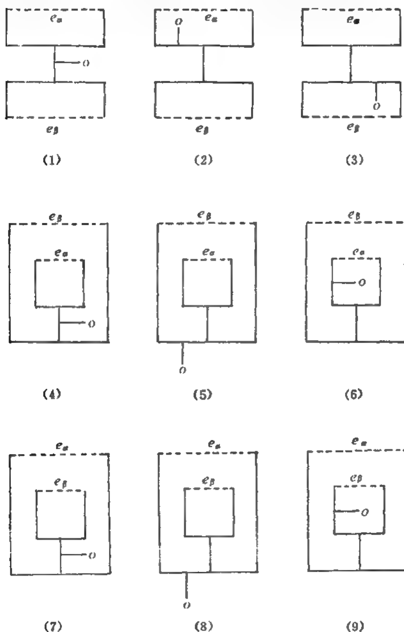



图 32

文
俊

对于这些不同情形，$u_a$等所取的值可列表如下：

| 情形 | $u_\alpha$ | $u_\beta$ | $g_{\alpha\beta}$ | $g_{b\alpha}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 0 |

数组

$$(u_\alpha, u_\beta, g_{\alpha\beta}, g_{b\alpha})$$

所能取的不同组值为 $2^4=16$。但由于

$$g_{\alpha\beta}g_{b\alpha}=0,$$

实际上所能取的组值只有 12 个。在此 12 个组值中，只有上表所示的 9 个解为某一嵌入所实现，其他 3 组则不可能。我们现在的目的，在寻觅一个 $u_\alpha$，$u_\beta$，$g_{\alpha\beta}$，$g_{b\alpha}$ 间的代数式 $Y$，使对上表中 9 种情形都有 $Y=0$，而对其他三种情形则有 $Y=1$。这样 $Y=0$ 将为 $e_\alpha$，$e_\beta$ 各种可能嵌入的制约关系。

显然 $Y$ 不能取为 $u_\alpha$，$u_\beta$，$g_{\alpha\beta}$，$g_{b\alpha}$ 间的一次式。为对符合要求的各种二次式进行尝试，先列出一表如下：

| 情 | 形 | 数组 $(u_\alpha, u_\beta, g_{\alpha\beta}, g_{ba})$ | $u_\alpha u_\beta$ | $u_\alpha g_{\alpha\beta}$ | $u_\beta g_{ba}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 可能情形 | 1 | (0,0,0,0) | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | (1,0,0,1) | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | (0,1,1,0) | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | (0,1,0,0) | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | (0,0,1,0) | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | (1,1,0,1) | 1 | 0 | 1 |
| | 7 | (1,0,0,0) | 0 | 0 | 0 |
| | 8 | (0,0,0,1) | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | (1,1,1,0) | 1 | 1 | 0 |
| 不可能情形 | 10 | (1,0,1,0) | 0 | 1 | 0 |
| | 11 | (0,1,0,1) | 0 | 0 | 1 |
| | 12 | (1,1,0,0) | 1 | 0 | 0 |

由上表可见，一个合适的代数式是

$$Y = u_\alpha u_\beta + u_\alpha g_{\alpha\beta} + u_\beta g_{ba}\text{。}$$

因此，数组$(u_\alpha)$相应于一真正扩充到$G$的嵌入的必要条件是对任两外棱$e_\alpha$，$e_\beta$都有

$$u_\alpha u_\beta + u_\alpha q_{\alpha\beta} + u_\beta{}^3{}_{ba} = 0\text{。}$$

容易验证，这个条件也是充分的。我们把这一结论表达于下，并于其后的验证中证实这一结论的真实性。

**树形嵌入扩充分类术**　设 $g:T\subset$平面，已知$g$可扩充为$G$的嵌入。对每一外棱$e_\alpha$，引入一(模 2)未知数$y_\alpha$，则扩充为$G$的嵌入的不同方式与下述(模 2)方程组($a$是$e_\alpha$的任一端，$b$是$e_\beta$的任一端)：

$$(Y)_g \qquad\qquad Y_{\alpha\beta}(g) = 0$$

的不同(模 2)解答$(y_\alpha) = (u_\alpha)$相对应，其中

$$Y_{\alpha\beta}(g) = y_\alpha y_\beta + y_\alpha g_{\alpha\beta} + y_\beta g_{ba}\text{。}$$

**验证** 在"剖析"中已说明每一扩充到 $G$ 的嵌入必相应于 $(Y)_g$的一组解答，反之，设

$$(y_\alpha)=(u_\alpha)$$

是$(Y)_g$ 的一组解答，试用归纳法验证必有一扩充到$G$的嵌入与之相应如下。

将$G$的外棱任意排成一次序 $e_1$，$e_2$，…，$e_L$，设已将 $g:T\subset$平面扩充为一嵌入

$$\overline{g}:T\cup e_1\cup\cdots\cup e_k\subset\text{平面},$$

使

$$u_\beta=\text{次}_O\overline{g}(C_\beta),\ \beta=1,\ \cdots,\ k。$$

试考虑

$$e_\alpha=e_{k+1}。$$

按$(Y)_g$，有

$$u_\alpha(u_\beta+g_{\alpha\beta})=q_{b\alpha}u_\beta,\ \beta=1,\ \cdots,\ k。$$

若对每一$\beta=1$，…，$k$ 都有

$$u_\beta+g_{\alpha\beta}=0,$$

亦即

$$\text{次}_a\overline{g}(C_\beta)=0,$$

由此知 $e_\alpha$ 的任一端 $a$，因而两端 $a$，$a'$ 都在诸 $\overline{g}(C_\beta)$之外。因而可有两种方式扩充为 $e_\alpha$ 的嵌入。我们可选取 $\overline{g}(e_\alpha)$使

$$\text{次}_O\overline{g}(C_\alpha)=\text{给定的 } u_\alpha。$$

其次，设在$\beta=1$，…，$k$ 中至少有一，设为$\beta_0$，使

$$u_{\beta_0}+g_{\alpha\beta_0}=1,$$

则仍按$(Y)_g$ 有

$$u_\alpha=g_{b_\alpha}u_{\beta_0}。$$

由于已给 $u_{\beta_0}$ 而 $g_{b_\alpha}$ 由 $g:T\subset$平面完全确定，故由上式知，

$u_\alpha$ 已由 $g$ 及其扩充 $\overline{g}:T\cup e_1\cup\cdots\cup e_k\subset$平面唯一确定。因已知 $g_{\alpha\beta}=0$，$\beta=1$，…，$k$，故知 $\overline{g}$ 必可扩充至 $e_\alpha$，且知扩充所得的数

$$次_o\overline{g}(C_\alpha)$$

只能是上面唯一确定的 $u_\alpha$。

因之，由归纳法知，必有扩充

$$\overline{g}:G\subset 平面$$

使诸外棱 $e_\alpha$ 所定数组

$$(次_o\overline{g}(C_\alpha))$$

即为方程组 $(Y)_g$ 预先给定的解答 $(u_\alpha)$。至此验证完毕。

2.（平面性）线图嵌入的分类（第四基本定理）

**问题** 上面树形嵌入扩充分类术是对一确定且已知可扩充到 $G$ 的嵌入 $g:T\subset$平面而言。试对任意已知可扩充到 $G$ 的嵌入 $f:T\subset$平面作出相应的结论。

**剖析** 对于任一嵌入 $f:T\subset$平面，由第三部分第5节与第四部分第5节中的线图嵌入术（第一，第三基本定理）知，$f$ 能否改变为 $g:T\subset$平面使 $g$ 可扩充为 $G$ 的嵌入系由方程组

$(\mathrm{I})_f$ $\qquad x_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta},$

$(\mathrm{II})_f$ $\qquad Q_{ijk}(f,x)=1,$

所定，且这样的嵌入 $g:T\subset$平面与方程组 $(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$ 的解答

$$(x_{ij})=(\varepsilon_{ij})$$

相对应，使

$$g_{ij}=f_{ij}+\varepsilon_{ij}。$$

对于一个确定的、可扩充至 $G$ 的嵌入 $g:T\subset$平面，亦即对于一组确定的 $(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$ 的解答 $(x_{ij})=(\varepsilon_{ij})$，$g$ 扩充到整个 $G$ 的可能的嵌入依树形嵌入扩充分类术又与方程组

$(Y)_g \qquad\qquad Y_{\alpha\beta}(g)=0$

的解答相对应，而 $Y_{\alpha\beta}(g)$ 中

$$q_a = f_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta},$$
$$q_{ba} = f_{ba} + e_{ba}。$$

由此得下述结论：

**线图嵌入分类术（第四基本定理）** 任作 $f:T\subset$ 平面，则 $G$ 可嵌入平面的类型与下方程组 $(\mathrm{I})_f$，$(\mathrm{II})_f$，$(\mathrm{III})_f$ 的解答数相对应：

$(\mathrm{I})_f \qquad x_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}。$

$(\mathrm{II})_f \qquad (x_{ij}+f_{ij})(x_{ik}+f_{ik})+(x_{jk}+f_{jk})(x_{ji}+f_{ji})$
$$+(x_{ki}+f_{ki})(x_{kj}+f_{kj})=1。$$

$(\mathrm{III})_f \qquad y_\alpha y_\beta+(x_{\alpha\beta}+f_{\alpha\beta})y_a+(x_{ba}+f_{ba})y_\beta=0。$

## 总　　结

在上面五部分中，对布线诸问题的解决作了详细说明。现将所用方法与所得结论重新概述如下。

首先在已给线图 $G$ 中任选一最大树 $T$ 并添加一 树根 $O$ 。$G$ 限制如第一部分第 1 节中所说，且 $G$，$T$ 已改造如第二部分第 2 节中所示。

将 $T$ 任意嵌入平面，嵌入方式记为 $f$，即作

$$f:T\subset 平面,$$

于是对任两以同一顶点为前端的树棱 $t_i$，$t_j$，依 $f$ 下 $t_i$，$t_j$ 旋向的顺反可定一模 2 数

$$f_{ij}=f_{ji}+1。$$

又任意扩充 $f$ 为一相对于 $T$ 的浸入

$$\tilde{f}: G \underset{T}{\subset} 平面,$$

则对每两外棱 $e_\alpha$, $e_\beta$, 由 $\tilde{f}$ 下 $e_\alpha$, $e_\beta$ 的交截情况可定一与充 $\tilde{f}$ 无关的模 2 数

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}。$$

在数组$(f_{\alpha\beta})$与$(f_{ij})$间有基本关系式

$$f_{\alpha\beta} = f_{ab} + f_{ab'} + f_{a'b} + f_{a'b'},$$

此处 $e_\alpha = \widehat{aa'}$，$e_\beta = \widehat{bb'}$，而 $f_{ab}$ 等由 $f_{ij}$ 等确定如第三部分第 4 节中所示。

原来$T$的嵌入$f$一般不可能扩充到整个$G$，而需先将$f$变为另一$T$的嵌入

$$g: T \subset 平面$$

始有此可能。又在能扩充为$G$的嵌入时，每一外棱 $e_\alpha$ 在嵌入后与树形是否共同包含树根O于其内部又有两种可能情况。为此，我们引入两个模 2 未知数组

$$(x_{ij})与(y_\alpha),$$

其中 $x_{ij} = x_{ji}$ 描述以同一顶点为前端的两树棱 $t_i$, $t_j$ 在 $f$ 下的旋向是否需要改变，而 $y_\alpha$ 则描述外棱 $e_\alpha$ 嵌入后是否应与树形共同包含根O于其内部。

我们确定了三组方程

$(\mathrm{I})_f$ $\qquad x_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}。$

$(\mathrm{II})_f$ $\qquad (x_{ij}+f_{ij})(x_{ik}+f_{ik}) + (x_{jk}+f_{jk})(x_{ji}+f_{ji})$

$$+ (x_{ki}+f_{ki})(x_{kj}+f_{kj}) = 1。$$

$(\mathrm{III})_f$ $\qquad y_\alpha y_\beta + (x_{\alpha\beta}+f_{\alpha\beta})y_\alpha + (x_{b\alpha}+f_{b\alpha})y_\beta = 0。$

这些方程的几何意义分别如下：

方程$(\mathrm{II})_f$代表将 $f: T \subset$ 平面改为另一$T$的嵌入时旋向的改变值$(x_{ij})$必须满足的制约关系。方程$(\mathrm{I})_f$代表将$f$依$(x_{ij})$改

变为另一$T$的嵌入后，可扩充至外棱$e_\alpha$，$e_\beta$，使在此嵌入下不相遇的条件。方程$(III)_f$则代表$f$已依$(x_{ij})$改变为另一嵌入后，为扩充至$G$诸外棱在嵌入下必须遵守的相互缠绕的制约关系。

我们获得的结果如下：

(1) $G$可嵌入的充要条件是方程组$(I)_f$有解——第二基本定理。

(2) 方程组$(I)_f$有解时，联立的方程组$(I)_f$，$(II)_f$也有解，且从$(I)_f$的解可依确定步骤获得$(I)_f$，$(II)_f$的解——第三基本定理。

(3) 可以扩充到整个$G$的不同嵌入$g:T\subset$平面恰与$(I)_f$，$(II)_f$的不同解答$(x_{ij})$相对应——第一基本定理。

(4) $G$的所有不同嵌入：

$$g:G\subset\text{平面}$$

恰与$(I)_f$，$(II)_f$，$(III)_f$联立方程组的不同解答

$$(x_{ij},\ y_e)$$

相对应——第四基本定理。

以上(1)—(4)解答了图7中的全部问题，只是机器化程序的编试尚待进行。但这些结果都通过选取一最大树$T$以及任择一嵌入$f:T\subset$平面而获得，而$T$与$f$的选取都带有极大的任意性。为此，可提出下述问题：考虑一种由$G$本身而不依赖于$T$与$f$的选取的解决方法。这个方法可由本书的示嵌类理论提供。按从$G$可作一、二维模2示嵌类$\Phi^2(G)$。我们的一般理论指出

$$\boxed{G\text{可嵌入平面}\Longleftrightarrow\Phi^2(G)=0}$$

这一结果称为线图嵌入的第五基本定理。若选择一最大树 $T$ 与任意嵌入 $f:T\subset$ 平面，容易验明

$$\boxed{\Phi^2(G)=0 \Longleftrightarrow (\mathrm{I})_f\text{有解}}$$

由此即得上面的结果(1)。由于这些结论是纯理论性的，与本附录宗旨不尽相符，故论证一概从略。

附记 （1977 年 12 月）。方程组$(\mathrm{I})_f$的每一个方程一般说来可以有 4 个含未知数的项。最近数学所的刘彦佩同志证明，若适当选择最大树，可使$(\mathrm{I})_f$的每一方程都祗含 2 个有未知数的项。这使判断$(\mathrm{I})_f$有解与否也即 $G$ 能否嵌入平面与否变得极为简单。这是本理论的一个重要进展。刘彦佩同志的论文《模 2 规划与平面嵌入》将发表于应用数学学报。

# 集成电路设计中的一个数学问题

## 一、引　　言

集成电路的设计牵涉到线性图的平面性即是否可在平面中拓扑地实现的问题，这个问题的各个方面可用图1来概括：

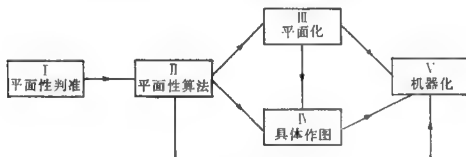



图1

Ⅰ—Ⅴ的几个方面可说明如下：

Ⅰ.**平面性判准**——给出一个线性图是否有平面性的判准。这样的判准早在三十年代就已给出，如 Kuratowski[4]，Whitney[5]，MacLane[5]等。其中 Kuratowski 判准说，线性图$G$有平面性的充要条件是，$G$ 不含有任何下面两类子图形之一：

但这一类判准在实用上有困难，例如图3是非平面性的，有一 Kuratowski 子图形如粗黑线所示，但并不容易找出：

Ⅱ.**平面性算法**——给出一个算法，依据它能依照确定步骤来判断一个线性图是否有平面性。上面所提到的那些判准都

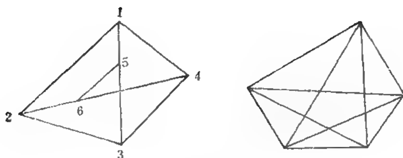


图 2

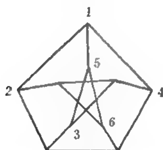


图 3

不足以从此导出一个算法来。这样的算法直到近几年才出现，见 Auslander-Parter[1]，与 Bader[2]。

Ⅲ. 平面化——原来的线性图是非平面性的，但在除去某些棱后余下的线性图可以是平面性的。这种手续可叫做线性图的平面化。

Ⅳ. 具体作图——即使线性图$G$有平面性或已平面化，也并不等于说$G$已在平面上画出，因之需要有一个将$G$在平面上具体画出的方法。

Ⅴ. 机器化——由于所考虑到的线性图往往是很复杂的，即使Ⅰ—Ⅳ诸问题在原则上已解决也难以用手算来付诸实施。

因之需要程序化，使Ⅰ—Ⅳ各问题都能在电子计算机上解决。

国外对这些问题的处理情况如下：

Auslander-Parter 与 Bader（两文内容实质上是相同的）给出了一个分解原来线性图为更小的图形并重复进行的方法来解决问题Ⅰ—Ⅳ，Fisher-Wang[3] 更依据它来机器化，但是他们所给出的只是一个具体进行的方法而缺少理论的提炼，而 Kuratowski 等则虽有理论却不能实际使用。

我们对这些问题的处理情况如下：

对问题Ⅰ，我们在 1954 年以来所创立的示嵌类理论早已提供了一个简单的判准。这个判准容易化为一组模 2 系数的线性方程组的可解性问题，在这组方程有解时，根据它的解即可具体作图。这给出了问题Ⅰ—Ⅳ的解答，依据它来机器化乃是一个纯粹程序设计的问题，并没有什么实质性的困难。

## 二、线性图的平面性与示嵌类

设$G$是一线性图，$G$的顶点的集合将记作$G^0$，棱的集合记作$G^1$。我们将作下述假定，这对$G$的平面性的考虑不产生影响：

(1) 没有两端是同一顶点的棱。

(2) 连接$G$中任两顶点的棱，至多只有一条。

(3) $G$是连通的。

记$G^1$中的棱为$e_1$，…，$e_n$，指数集$\{1,\cdots,n\}$记作$I$。对于一切无序指数偶$(i,j)$，$i\neq j, i,j\in I$，我们将分成两部分$D$与$N$。如果$e_i$，$e_j$在$G$中无公共顶点，则置$(i,j)\in D$，否则置$(i,j)\in N$。

**对称约化积**

对 $G$ 可作一二维复形 $G^*$，称之为 $G$ 的二重对称约化积者如次，$G^*$ 的二维胞腔对应于一切 $(i,j)\in D$，记作 $e_i{}^*e_j=e_j{}^*e_i$。$G^*$ 的一维胞腔对应于 $G$ 中一切顶点 $v$ 与棱 $e_i$ 的偶合，而 $v$ 非 $e_i$ 的顶点，记之为 $v^*e_i=e_i{}^*v$。$G^*$ 的 0 维胞腔对应于 $G$ 中一切无序的顶点偶 $(v,w)$，而 $v\neq w$，记之为 $v^*w=w^*v$。如果 $e_i$ 的顶点是 $v_{i1}$，$v_{i2}$，$e_j$ 的顶点是 $v_{j1}$，$v_{j2}$，则 $G^*$ 中的（模 2）边界关系将定义为：

$$\begin{cases}\partial(e_i{}^*e_j)=v_{i1}{}^*e_j+v_{i2}{}^*e_j+v_{j1}{}^*e_i+v_{j2}{}^*e_i,\\ \partial(v^*e_i)=v^*v_{i1}+v^*v_{i2},\\ \partial(v^*w_i)=0。\end{cases}$$

如果引入以下规定：

$$\begin{cases}e_i{}^*e_j=0,\ (i,j)\in N\text{ 时；}v^*e_i=0, v\text{ 为 }e_i\text{ 端点时；}v^*v=0,\\ \sum\limits_{i,j}a_{ij}e_i{}^*e_j=\sum\limits_j\Big(\sum\limits_i a_{ij}e_i\Big)*e_j=\sum\limits_i\Big(e_i{}^*\sum\limits_j a_{ij}e_j\Big),\end{cases}$$

余类推，则以上边界关系亦可表作 $(e_i{}^*e_j, v^*e_i, v^*w\in G^*)$

$$\begin{cases}\partial(e_i{}^*e_j)=\partial e_i{}^*e_j+e_i{}^*\partial e_j,\\ \partial(v^*e_i)=v^*\partial e_i,\\ \partial(v^*w)=0。\end{cases}$$

或对偶地说，

$$\begin{cases}\delta(v^*w)=\delta v^*w+v^*\delta w,\\ \delta(v^*e_i)=\delta v^*e_i,\\ \delta(e_i{}^*e_j)=0。\end{cases}$$

**浸入与嵌入**

以 $R^2$ 表平面。映象 $f:G\to R^2$ 将称为一个浸入，记为 $f:G\subset R^2$，如果以下条件满足：

(1) 对每一棱 $e_i \in G^1$，$f/e_i$ 是一拓扑映象。

(2) 对每一棱 $e_i \in G^1$，$f(e_i)$ 除原来的端点外，不再经过其他顶点的象。

(3) 对每两棱 $e_i \neq e_j \in G^1$，$f(e_i)$，$f(e_j)$除可能有的公共顶点外，至多"简单相交"于有限个内点，即每一交点处的相交指数为 1（模 2）。

如果浸入 $f$ 对每两棱 $e_i \neq e_j \in G^1$，$f(e_i)$，$f(e_j)$ 至多在可能有的公共顶点处相遇，则 $f$ 是 $G$ 的一个拓扑映象。此时 $f$ 将称为一个嵌入，记作 $f: G \subset R^2$。如果有这样的嵌入存在，则 $G$ 称为一平面图形，或具有平面性，记作 $G \subset R^2$。

**示嵌链**

所有的链，同调等都将是模 2 的，在以下不再说明。

设 $f: G \subset R^2$ 是一个浸入。对 $f$ 引入一 $G^*$中的二维上闭链 $\varphi_f = \varphi$ 如下。对任意$(i, j) \in D$，命

$$\varphi_{ij} = I_f(e_i, e_j),$$

即 $f(e_i)$，$f(e_j)$的相交指数。置

$$\varphi = \sum_{(i,j) \in D} \varphi_{ij} e_i{}^* e_j。$$

显然 $\varphi$ 是上闭链，我们将称 $\varphi$ 为浸入 $f$ 的示嵌链。$\varphi$ 之不等于 0 可视为 $f$ 异于嵌入的一个测度。

**定理** 对任意浸入 $f$，相应的示嵌链 $\varphi$ 恒属于同一个上同调类 $\Phi$。

**证** 设 $f, g: G \subset R^2$，相应的示嵌链各为 $\varphi = \Sigma \varphi_{ij} e_i{}^* e_j$ 与 $\psi = \Sigma \psi_{ij} e_i{}^* e_j$。需证 $\varphi \sim \psi$。

为此，先设对任意顶点 $v$，$f(v) = g(v)$，且有一 $e_k \in G^1$，在 $e_i \neq e_k$ 时，$f \equiv g/e_i$，而 $f(e_k)$，$g(e_k)$除公共端点外不相遇。

于是 $f(e_k)$，$g(e_k)$构成一 $R^2$ 中的简单闭曲线 $C$。设在 $f$ 与 $g$ 下象在 $C$ 内部的顶点为 $v_{k1},\cdots,v_{ks}$。试证

$$\varphi=\psi+\sum_{r=1}^{s}\delta v_{kr}*e_k。\qquad (*)$$

为此，先设 $i\neq k, j\neq k$，而$(i,j)\in D$，则显然有 $\varphi_{ij}=\psi_{ij}$，而$(*)$式左右两边 $e_i*e_j$ 的系数相等。今设$(k,l)\in D$，而 $e_l$ 两端点在 $f,g$ 下的象同在 $C$ 的内部。则此两端点将为 $v_{kp}$ 与 $v_{kq}$。于是在$(*)$式右边的 $\Sigma$ 中 $e_k*e_l$ 将出现两次而其和为 0。其次 $f(e_l)=g(e_l)$与$C$ 将简单相交于偶数次，因而 $\varphi_{kl}=\psi_{kl}$。故此时两边 $e_k*e_l$ 的系数仍相等。当两端点在 $f,g$ 下的象同在 $C$ 外部时亦如此。最后设两端点的象一在 $C$ 内而一在 $C$ 外，在内者设为 $v_{kp}$。则$(*)$式右边 $\Sigma$ 中 $e_k*e_l$ 的项将出现一次。又此时 $f(e_l)=g(e_l)$将与 $C$ 简单相交于奇数个点，因而 $\varphi_{kl}=\psi_{kl}+1$。故两边 $e_k*e_l$ 的系数仍将相等。因而 $(*)$ 式成立而有 $\varphi\sim\psi$。

在上情形中 $f(e_k),g(e_k)$除公共顶点外不相遇的条件容易除去。盖可取 $h:G\subset R^2$ 使 $e_l\neq e_k$ 时，$h\equiv f\equiv g/e_l$，而 $h(e_k)$，$f(e_k)$以及 $h(e_k),g(e_k)$各满足上述条件。命 $h$ 的示嵌链为 $\theta$，则将有 $\theta\sim\varphi$ 与 $\theta\sim\psi$，因而 $\varphi\sim\psi$。

次设对任意顶点 $v$ 有 $f(v)=g(v)$而对任意两棱 $e_k$，$e_l\in G_1$ ($k$ 亦可 $=l$)，$f(e_k)$与 $g(e_l)$除可能的公共端点外，只简单相交于有限个内点，即在每点的相交指数为 1（模 2）。今作 $h_0,\cdots,h_{n-1}:G\subset R^2$ 如下。$h_k:G\subset R^2$ 使 $h_k$ 在 $e_1,\cdots,e_k$ 上与 $f$ 相同而在 $e_{k+1},\cdots,e_n$ 上与 $g$ 相同。则 $h_0\equiv g$ 而 $h_n\equiv f$。记 $h_k$ 的相应示嵌链为 $\varphi_k$。由已证明的情形，应有 $\varphi_k\sim\varphi_{k+1}, k=0, 1,\cdots,n-1$。故得 $\varphi_0\sim\varphi_n$ 即 $\psi\sim\varphi$。

若对任意顶点 $v$ 仍有 $f(v)=g(v)$。则总可作一浸入 $h:G$

$\subset R^2$ 使对任意顶点 $v$，有 $h(v)=f(v)=g(v)$，而对任意两棱 $e_k, e_l \in G^1$（$k$ 亦可 $=l$），$f(e_k)$ 与 $h(e_l)$ 以及 $g(e_k)$ 与 $h(e_l)$ 除可能的公共端点外，只简单相交于有限个内点，记 $h$ 的相应示嵌链为 $\theta$，则应有 $\varphi\sim\theta$，$\psi\sim\theta$，故仍有 $\varphi\sim\psi$。

最后，设 $f, g$ 任意。命 $h$ 为 $R^2$ 到 $R^2$ 上的一个拓扑变换，使对任意顶点 $v\in G^0$，有 $hf(v)=g(v)$。记 $hf$ 的相应示嵌链为$\theta$，则依前述情形有 $\theta\sim\psi$。另一面因 $h$ 为拓扑变换故显然有 $\theta\sim\varphi$。因之仍有 $\varphi\sim\psi$。

至此定理证毕。

**定义** 定理中所确定的上同调类 $\Phi$ 将称为 $G$ 的示嵌类。

如果 $G$ 有平面性而 $f: G\subset R^2$ 是一嵌入，则相应于 $f$ 的示嵌链显为 0。因而可得下述。

**嵌入定理（必要部分）** $G$ 有平面性的一个必要条件是：$G$ 的示嵌类 $\Phi=0$，或对任意浸入 $f: G\subset R^2$，相应的示嵌链 $\varphi\sim 0$。

（注：这个定理中的条件不仅是必要的，而且是充分的。但这一点将在五中证明。）

## 三、G 的平面性判准——基本定理与基本方程组

为了根据嵌入定理以确定 $G$ 是否具有平面性，试记 $G$ 中顶点的集合为 $\{v_1,\cdots,v_m\}=G^0$。任作一浸入 $f: G\subset R^2$，记其相应的示嵌链为

$$\varphi=\Sigma\varphi_{ij}e_i{}^*e_j。$$

于是 $G\subset R^2$ 的一个必要条件是 $\varphi\sim 0$ 或有 $x\lambda_i$ 存在使

$$\varphi = \Sigma x_{\lambda i}\delta(v_\lambda * e_i),$$

这里的 $\Sigma$ 展开于一切使 $v_\lambda$ 非 $e_i$ 端点的指数偶 $(\lambda, i)$ 上，比较两边 $e_i * e_j$ 的系数，即得一组以 $x_{\lambda i}$ 为未知数的模 2 线性方程组。这组方程可解是 $G$ 有平面性的必要条件，以后也将证明这些条件是充分的。

这个判准的原理虽然简单，但由于未知数的个数接近于 $mn$，方程的个数接近于 $n^2$，因之当图 $G$ 比较复杂，$m, n$ 相当大时，这个判准事实上并不实用，即使用了电子计算机也是如此，因此有必要简化上述方程组使之即使在 $m, n$ 很大时也可以通过电子计算机来实现。这是以下的目的所在。

**最大树**

为了这一目的，试在 $G$ 中取一树 $T$，通过 $G$ 的所有顶点。这样的树 $T$ 将称为 $G$ 的一个最大树。$T$ 的任一棱将称为一个节段，顶点也称节点。如果 $T$ 中在节点 $v_\lambda$ 处只有一个节段，则 $v_\lambda$ 也称为节梢。

对 $T$ 的任一节段 $e_i$，$T-$ 内部 $(e_i)$ 分成两个分支，记为 $C'_i, C_i''$。命 $\Sigma_i$ 为所有 $e_a \in G^1 - T^1$ 的集合，这里 $e_a$ 的一端在 $C_i'$ 中，而另一端在 $C_i''$ 中。又对任一棱 $e_a \in G^1 - T^1$，在 $T$ 中将有唯一的一条通路从 $e_a$ 的一端到 $e_a$ 的另一端，记之为 $\mathscr{P}_a$。置

$$E_i = \sum_{e_a \in \Sigma_i} e_a, \quad (e_i \in T^1),$$

$$P_a = \sum_{e_i \in \mathscr{P}_a} e_i, \quad (e_a \in C^1 - T^1),$$

这里 $E_i, P_a$ 都是 $G$ 中的（模 2）上链。于是显然有

$$e_a \in \Sigma_i \Longleftrightarrow e_i \in \mathscr{P}_a.$$

**引理 1** 对于最大树 $T$ 而言，$G$ 的一维上边缘群有一组基

底由以下各上边缘所构成：

$$e_i+E_i,\ e_i\in T_{\circ}$$

证　对 $e_i\in T$，命 $A_i'$ ($A_i''$)为 $C_i'$ ($C_i''$)中一切顶点的集合，则易见

$$e_i+E_i=\sum_{v'\in A_i'}\delta v'=\sum_{v''\in A_i''}\delta v''。\qquad (1)$$

故每一 $e_i+E_i$ 为一上边缘，且不同的 $e_i+E_i$ 恰含有一不同的 $e_i\in T$，故这些 $e_i+E_i$ 是线性独立的。

另一面，对任一 $G$ 的顶点 $v$，设 $e_j, e_{j1},\cdots, e_r$ 是 $T$ 中在 $v$ 处的节段全体。命 $C_j'$ 为 $T$－内部（$e_j$）中含有 $v$ 的分支，而 $C'_{js}$ 为 $T$－内部（$e_{js}$）中不含 $v$ 的那一分支。则由（1）式有

$$\delta_v=(e_j+E_j)+\sum_{s=1}^{r}(e_{js}+E_{js})。$$

故任一上边缘可表为形如 $e_i+E_i$ 的上边缘之和。由此引理得证。

（注：上述引理事实上是已知的，在电网络理论中 $e_i+E_i$ 是一割集(cut set)，参阅 S. Seshu-N. Balanian, Linear Network Analysis, 1959, 页 70—71)

引理 2　$G^*$的二维上边缘群有以下一组生成元：

$$\begin{cases}(e_i+E_i)*(e_j+E_j),\ e_i,e_j\in T^1,\ (i,j)\in D\cup N;\\(e_i+E_i)*e_a,\ e_i\in T^1,\ e_a\in G^1-T^1,\ (i,a)\in D\cup N。\end{cases}$$

证　命 $v$ 为$G$的任一顶点，$e$ 为$G$的任一棱，而 $v$ 非 $e$ 的顶点，则 $G^*$的二维上边缘群由诸 $\delta(v*e)=\delta v*e$ 所生成。因$G$的一维上链群有一组基由诸 $e_j\in T^1$ 与 $e_a\in G^1—T^1$ 所构成，故也有一组基由诸 $e_j+E_j$ 与 $e_a$ 所构成。另一面由引理1，$\delta v$ 又可表为诸 $e_i+E_i$，$i\in T^1$ 的线性和，故得本引理。

**定义** 对最大树$T$而言，一个浸入$f:G\subset R^2$将称为一个$T$-浸入，如果 (1) $f:T\subset R^2$, (2)对任意$e_i\in T^1$与$e_a\in G^1-T^1$, $f(e_i)$与$f(e_a)$至多在公共端点处相遇。

**引理3** 设$\tilde{T}$是$T$在$G$中的一个邻域，则一个$T$-浸入$f$的示嵌链由$f/\tilde{T}$所完全决定。换言之，若$f,g$是两个$T$-浸入，而$f/\tilde{T}\equiv g/\tilde{T}$，则$\varphi_f=\varphi_g$。

**证** 若$e_i,e_j\in T^1$, $e_a\in G^1-T^1$, 而$(i,j),(i,a)\in D$，则$\varphi_f(e_i*e_j)=\varphi_g(e_i*e_j)=0$, $\varphi_f(e_i*e_a)=\varphi_g(e_i*e_a)=0$。今设$e_a,e_\beta\in G^1-T^1$, $(\alpha,\beta)\in D$。于是$f(e_a)$, $f(\mathscr{P}_a)$构成一简单闭曲线$C$。记$e_\beta$的两端为$a_1,a_2$，则$f(a_1)=g(a_1)$, $f(a_2)=g(a_2)$。在$e_\beta$内部取两点$a_1'$, $a_2'\in\tilde{T}$充分接近于$a_1$, $a_2$。则视$a_1'$, $a_2'$同在$C$之内或外或一在$C$内一在$C$外，相交系数$I(f(e_\beta),f(e_a))$与$I(g(e_\beta),f(e_a))$将同为0或同为1。同样，相交系数$I(g(e_\beta),f(e_a))$与$I(g(e_\beta),g(e_a))$亦同为0或1。故

$$I(f(e_\beta),\ f(e_a))=I(g(e_\beta),\ g(e_a))$$

或

$$\varphi_f(e_a*e_\beta)=\varphi_g(e_a*e_\beta)。$$

因而$\varphi_f=\varphi_g$，如所欲证。

**基本定理Ⅰ(必要部分)** $G$有平面性的一个必要条件是，对最大树$T$而言，下述方程组有解：

$$\begin{cases}\Sigma_0 x_{ij}+\Sigma_1 x_{ia}+\Sigma_2 x_{i\beta}=\varphi_{a\beta},\\(\alpha,\beta)\in D,\ \ e_a,e_\beta\in G^1-T^1。\end{cases}\quad(1)$$

其中：

$\varphi=\Sigma\varphi_{a\beta}e_{a_a}e_\beta$为相应于某一$T$-浸入的示嵌链。

$\Sigma_0$展开于一切无序指数偶$(i,j)\in N$, $e_i\in\mathscr{P}_\beta$, $e_j\in\mathscr{P}_a$之上而$x_{ij}=x_{ji}$。

$\Sigma_1$ 展开于使 $(i,\alpha)\in N$，$e_i\in\mathscr{X}_\beta$ 的一切指数 $i$ 上。

$\Sigma_2$ 展开于使 $(i,\beta)\in N$，$e_i\in\mathscr{X}_\alpha$ 的一切指数 $i$ 上。

**附注** 方程组（Ⅰ）将称为 $G$ 对最大树 $T$（以及某一 $T$-浸入）而言的基本方程组。诸 $x_{ij}=x_{ji}((i,j)\in N,\ e_i,e_j\in T^1)$ 与 $x_{i\alpha}((i,\alpha)\in N,\ e_i\in T^1,\ e_\alpha\in G^1-T^1)$ 将称为基本变数。

**证** 依嵌入定理，$G\subset R^2$ 的一个必要条件为 $\varphi\sim 0$，这里

$$\varphi=\Sigma\varphi_{\alpha\beta}e_\alpha{}^*e_\beta$$

为相应于某一 $T$-浸入 $f:G\subset R^2$，$f:T\subset R^2$ 的示嵌链。由引理2，这个必要条件成为：对 $(i,j)$，$(i,\alpha)\in D\cup N$，$e_i$，$e_j\in T^1$，$e_\alpha\in G^1-T^1$，有模2数 $x_{ij}=x_{ji}$ 与 $y_{i\alpha}$ 存在，使

$$\varphi=\Sigma x_{ij}(e_i+E_i)*(e_j+E_j)+\Sigma y_{i\alpha}(e_i+E_i)*e_\alpha。\qquad(2)$$

比较两边 $e_i{}^*e_j$，$e_i{}^*e_\alpha$，与 $e_\alpha{}^*e_\beta(e_i,\ e_j\in T^1,e_\alpha,e_\beta\in G^1-T^1,(i,j)$，$(i,\alpha)$，$(\alpha,\beta)\in D)$ 的系数，得：

$$x_{ij}=0,\ (i,j)\in D。\qquad ①$$

$$y_{i\alpha}=\sum_{e_\alpha\in\mathscr{F}_j}x_{ij}=\sum_{e_j\in\mathscr{F}_\alpha}x_{ij},\ (i,\alpha)\in D。\qquad ②$$

$$\varphi_{\alpha\beta}=\sum_{e_j\in\mathscr{F}_\beta}y_{j\alpha}+\sum_{e_j\in\mathscr{F}_\alpha}y_{j\beta}+\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{F}_\alpha\\ e_j\in\mathscr{F}_\beta}}x_{ij},\ (\alpha,\beta)\in D。\qquad ③$$

今对 $(i,\alpha)\in N$，$e_i\in T^1$，$e_\alpha\in G^1-T^1$ 引入 $x_{i\alpha}$ 使

$$y_{i\alpha}=\sum_{e_j\in\mathscr{F}_\alpha}x_{ij}+x_{i\alpha},\ (i,\alpha)\in N。\qquad ④$$

于是对 $(\alpha,\beta)\in D$，$e_\alpha$，$e_\beta\in G^1-T^1$ 应用①，②，③，即得

$$\varphi_{\alpha\beta}=\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{F}_\beta\\(i\ j)\in N}}\ \sum_{e_j\in\mathscr{F}_\alpha}x_{ij}+\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{F}_\beta\\(i\alpha)\in N}}x_{i\alpha}$$

$$+\sum_{e_i\in\mathscr{P}_\alpha}\ \sum_{\substack{e_j\in\mathscr{P}_\beta\\(i\,j)\in N}} x_{ij}+\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{P}_\alpha\\(i\beta)\in N}} x_{i\beta}$$

$$+\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{P}_\alpha\\e_j\in\mathscr{P}_\beta\\(i\,j)\in N}} x_{ij}$$

或

$$\varphi_{\alpha\beta}=\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{P}_\beta\\e_j\in\mathscr{P}_\alpha\\(i\,j)\in V}} x_{ij}+\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{P}_\beta\\(i\alpha)\in N}} x_{i\alpha}+\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{P}_\alpha\\(i\beta)\in N}} x_{i\beta},\quad(\alpha,\ \beta)\in D。\qquad ⑤$$

显然方程组⑤有解时，方程组①—④亦即（2)有解。故$G\subset R^2$的一个必要条件为方程组⑤有解。但⑤式亦即（Ⅰ）式，故定理得证。

## 四、基本方程组的分析与简化

**方程组(Ⅰ)的分析**

设$e_\alpha$，$e_\beta\in G^1-T^1$，$(\alpha,\beta)\in D$。(Ⅰ)中与$(e_\alpha,e_\beta)$相应的方程为：

$$\sum_{\substack{e_i\in\mathscr{P}_\beta\\e_j\in\mathscr{P}_\alpha\\(i\,j)\in N}} x_{ij}+\sum_{\substack{e_i\in\beta\\(i\alpha)\in N}} x_{i\alpha}+\sum_{\substack{e_j\in\mathscr{P}_\alpha\\(j\beta)\in N}} x_{j\beta}=\varphi_{\alpha\beta},$$

或简写为：

$$\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2=\varphi_{\alpha\beta}。\qquad(Ⅰ)$$

就$\mathscr{P}_\alpha$与$\mathscr{P}_\beta$的相对关系，可分三种情形。

**情形1**　$\mathscr{P}_\alpha$，$\mathscr{P}_\beta$不相遇。

此时$\Sigma_0,\Sigma_1,\Sigma_2$都$=0$。由于此时$\varphi_{\alpha\beta}$必为0，故相应的方程必为$0=0$，方程是不足道的。

**情形 2**　$\mathscr{P}_\alpha$，$\mathscr{P}_\beta$ 有一顶点 $v$ 公共。

此时设 $\mathscr{P}_\alpha\cup\{e_\alpha\}$ 在 $v$ 的两个节段为 $e_a, e_b$（规定在 $e_\alpha$ 以 $v$ 为一端点时，$e_a, e_b$ 中有一例如 $e_b$ 即作为 $e_\alpha$）。同样设 $\mathscr{P}_\beta\cup\{e_\beta\}$ 在 $v$ 的两个节段为 $e_r, e_s$（规定在 $e_\beta$ 以 $v$ 为一端点时，$e_r, e_s$ 中有一例如 $e_s$ 即作为 $e_\beta$）。

若 $e_\alpha, e_\beta$ 都不以 $v$ 为端点（见图 4），则

$$\Sigma_0 = x_{ar} + x_{as} + x_{br} + x_{bs},$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0。$$

故相应的方程为：

$$x_{ar} + x_{as} + x_{br} + x_{bs} = \varphi_{\alpha\beta}。\quad (\mathrm{I})'$$

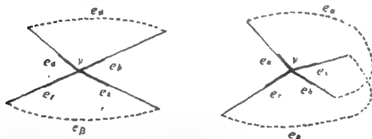



图 4

若 $e_\beta$ 以 $v$ 为端点（因而 $e_\alpha$ 不再以 $v$ 为端点），则（见图 5）

$$\Sigma_0 = x_{ar} + x_{br},\quad \Sigma_1 = 0,$$

$$\Sigma_2 = x_{a\beta} + x_{b\beta} = x_{as} + x_{bs}。$$

故相应的方程仍如上述形式。

在 $e_\alpha$ 以 $v$ 为端点时亦然。

**情形 3**　$\mathscr{P}_\alpha$，$\mathscr{P}_\beta$ 有一以顶点 $v, w$ 为两端的道路 $\mathscr{P}\subset T$ 公共。

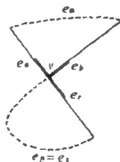



图 5

设$\mathscr{P}$在$v,w$处的节段为$e_c,e_t$（$e_c$也可与$e_t$相同），$\mathscr{P}_\alpha\cup\{e_\alpha\}$在$v$处的节段除$e_c$外设为$e_a$（规定在$e_\alpha$以$v$为端点时$e_a$即作为$e_\alpha$），在$w$处的节段除$e_t$外设为$e_r$（规定在$e_\alpha$以$w$为端点时$e_r$即作为$e_\alpha$）。同样，$\mathscr{P}_\beta\cup\{e_\beta\}$在$v,w$处的节段除$e_c$，$e_t$外设为$e_b,e_s$（规定在$e_\beta$以$v$或$w$为端点时$e_b$或$e_s$亦即为$e_\beta$）。

若$e_\alpha,e_\beta$都不以$v,w$为端点(见图6)，则

$$\Sigma_0 = x_{rs} + x_{rt} + x_{st} + x_{ab} + x_{ac} + x_{bc},$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0。$$

故相应的方程为

$$x_{rs} + x_{rt} + x_{st} + x_{ab} + x_{ac} + x_{bc} = \varphi_{\alpha\beta}。 \qquad (\text{I})''$$

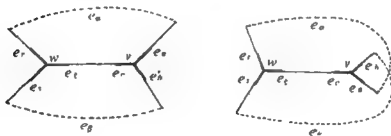



图 6

其次，若$e_\beta$以$v,w$为端点(因而$e_\alpha$不能以$v,w$为端点)，则（见图7）

$$\Sigma_0 = x_{rt} + x_{ac},\quad \Sigma_1 = 0,$$

$$\Sigma_2 = x_{r\beta} + x_{t\beta} + x_{a\beta} + x_{c\beta}$$

$$= x_{rs} + x_{st} + x_{ab} + x_{bc}。$$

因而相应方程仍如上式(I)″。

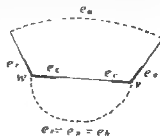



图 7

同样，若$e_\alpha$以$v$为端点，$e_\beta$以$w$为端点（见图8），则

$$\Sigma_0 = x_{rt} + x_{bc},$$

$$\Sigma_1 = x_{ba} + x_{ca} = x_{ab} + x_{ac},$$

$$\Sigma_2 = x_{r\beta} + x_{t\beta} = x_{rs} + x_{st},$$

方程仍如(Ⅰ)″。

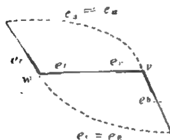



图 8

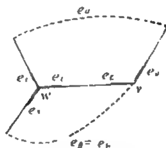



图 9

最后，若 $e_\beta$ 以 $v$ 为端点，而 $e_\alpha$ 不以 $v, w$ 为端点(见图 9)，则

$$\Sigma_0 = x_{rs} + x_{rt} + x_{st} + x_{ac},$$

$$\Sigma_1 = 0,$$

$$\Sigma_2 = x_{a\beta} + x_{c\beta} = x_{ab} + x_{bc},$$

方程仍如(Ⅰ)″。

其余情形可从以上情形互易 $e_\alpha, e_\beta$ 或 $v, w$ 而得出。所得方程恒如(Ⅰ)″。

总结起来，得

**命题** 方程组(Ⅰ)的每一方程，除不足道者（作 $0=0$ 形式）外，必如形式

$$x_{ar} + x_{as} + x_{br} + x_{bs} = \varphi_{\alpha\beta} \qquad (\text{Ⅰ})'$$

或

$$x_{rs} + x_{rt} + x_{st} + x_{ab} + x_{ac} + x_{bc} = \varphi_{\alpha\beta}. \qquad (\text{Ⅰ})''$$

为了显溪起见，特将各种情形列表如下（两种情形可从对

易例如将 $e_\alpha, e_\beta$ 或 $v, w$ 对易而得出者不同时并列)：

| 情形 | | $\Sigma_0$ | $\Sigma_1$ | $\Sigma_2$ | 方程形式 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ⅰ | | 0 | 0 | 0 | 0＝0 |
| Ⅱ | | $x_{\alpha\gamma}+x_{\alpha\delta}+x_{\beta\gamma}+x_{\beta\delta}$ | 0 | 0 | (Ⅰ)′ |
| | | $x_{\alpha\gamma}+x_{b\gamma}$ | 0 | $x_{\alpha\beta}+x_{b\beta}=x_{\alpha\delta}+x_{b\delta}$ | |
| Ⅲ | | $x_{\gamma\delta}+x_{\gamma\varepsilon}+x_{\delta\varepsilon}+x_{ab}+x_{ac}+x_{bc}$ | 0 | 0 | (Ⅰ)″ |

（续）

| 情形 | | $\Sigma_0$ | $\Sigma_1$ | $\Sigma_2$ | 方程形式 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $e_\alpha$ $e_\gamma$ $e_t$ $e_c$ $e_a$ $e_s=e_\beta=e_b$ | $x_{\gamma t}+x_{ac}$ | 0 | $x_{\gamma\beta}+x_{t\beta}+x_{a\beta}+x_{c\beta}=x_{\gamma s}+x_{st}+x_{ab}+x_{bc}$ | |
| Ⅱ | $e_a=e_\alpha$ $e_\gamma$ $e_b$ $e_t$ $e_c$ $e_s=e_\beta$ | $x_{\gamma t}+x_{bc}$ | $x_{ba}+x_{ca}=x_{ab}+x_{ac}$ | $x_{\gamma\beta}+x_{t\beta}=x_{\gamma s}+x_{st}$ | (1)″ |
| | $e_\alpha$ $e_\gamma$ $e_t$ $e_c$ $e_a$ $e_s$ $e_\beta=e_b$ | $x_{\gamma s}+x_{\gamma t}+x_{st}+x_{ac}$ | 0 | $x_{a\beta}+x_{c\beta}=x_{ab}+x_{bc}$ | |

**树根与多余变数**

为了将平面图具体作出，须要进一步将方程简化。为此引入一些概念如下。

在最大树 $T$ 中任取一个节梢 $O$，称之为树根。对任一顶点

$v\in G^0=T^0$，在$T$中有一唯一的通道连接$v$与$O$，称为到$v$的干道，记之为$\mathscr{P}_v$。设$e_i$是$\mathscr{P}_v$上在$v$处的节段，则对任一在$v$处的棱$e_j\in G^1$，$x_{ij}$将称为一多余变数。对在$v$处而不同于$e_i$的棱$e_j,e_k\in G^1$，当$e_j,e_k$都$\in G^1-T^1$时，$x_{jk}$称补充变数，否则$x_{jk}$称主要变数。此外，对一$T$-浸入$f$，除相应示嵌链

$$\varphi=\Sigma\varphi_{\alpha\beta}e_\alpha{}^*e_\beta$$

中出现的一组系数$\varphi_{\alpha\beta}((\alpha,\beta)\in D,\ e_\alpha,e_\beta\in G^1-T^1)$者外，对有一个顶点公共的$e_\alpha,e_\beta\in G^1-T^1$，我们也将定义$\varphi_{\alpha\beta}$为$f(e_\alpha)$，$f(e_\beta)$除去在公共端点外的交点数。

**扩充方程组**

原来基本方程组（Ⅰ）(或（Ⅰ）′，（Ⅰ）″）中出现的变数$x_{ij}$，都是主要变数或多余变政。今设$e_\alpha,e_\beta\in G^1-T^1$而$e_\alpha,e_\beta$有一公共顶点$v$。此时$\mathscr{P}_\alpha$与$\mathscr{P}_\beta$可只相遇于$v$亦可有一两端为$v,w$的通路$\mathscr{P}$公共。在第一情形（见图10）令$\mathscr{P}_\alpha$中在$v$处的节段为$e_b$，$\mathscr{P}_\beta$中在$v$处的节段为$e_s$，又置$e_a=e_\alpha$，$e_r=e_\beta$，此时我们将引入方程

（Ⅰ）′$_0$ $$x_{ar}+x_{as}+x_{br}+{}_{bs}=\varphi_{\alpha\beta}。$$

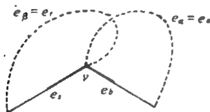



图 10

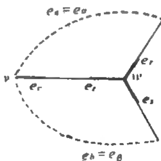



图 11

其次在第二情形（见图11），我们将设$\mathscr{P}$上在$v,w$处的节

段各为 $e_c, e_t$，在 $\mathscr{P}_\alpha$ 上 $w$ 处不同于 $e_t$ 的节段为 $e_r$，而在 $\mathscr{P}_\beta$ 上 $w$ 处不同于 $e_t$ 的节段为 $e_s$。在 $e_\alpha$ 或 $e_\beta$ 以 $w$ 为端点时，则置 $e_r = e_a$ 或 $e_s = e_\beta$。又置 $e_a = e_\alpha, e_b = e_\beta$。此时将引入方程

$(\text{I})_0''$ $$x_{rs} + x_{rt} + x_{st} + x_{ab} + x_{ac} + x_{bc} = \varphi_{\alpha\beta}。$$

由于这些方程与原来的基本方程$(\text{I})'$，$(\text{I})''$形式相同，且每个方程中恰含有一个补充变数（即 $x_{ar}$ 与 $x_{ab}$），而不同的方程所含的补充变数也不同，因之，如果将这些方程加入原来的基本方程组$(\text{I})$，方程有解与否的性质将并不因之而变。

我们将称添加$(\text{I})_0'$，$(\text{I})_0''$后的方程组为扩充方程组，并记之为$(\bar{\text{I}})$，$(\bar{\text{I}})'$，$(\bar{\text{I}})''$等。

**引理** 对最大树 $T$ 与根 $O$ 而言，对每一节点处 $e_i, e_j \in G^1$ 引入变数 $x_{ij}'$ 并置

$$\left.\begin{aligned}[i,j,k] &= x_{ij} + x_{ik} + x_{jk},\\ [i,j,k]' &= x_{ij}' + x_{ik}' + x_{jk}'\end{aligned}\right\} e_i, e_j, e_k \text{ 在同一节点处时。}$$

则当 $x_{ij}$ 为已知数时，方程组

$$\begin{cases}[i,j,k]' = [i,j,k],\\ x_{rs}' = 0, \quad (x_{rs}\text{ 为多余变数时})\end{cases}$$

有解。

**证** 在 $x_{rs}$ 为主要变数或补充变数而 $e_r, e_s$ 的公共节点非树根 $O$ 时，令自 $e_r, e_s$ 的公共节点到 $O$ 的通道在此节点处的节段为 $e_t$，而置

$$x_{rs}' = [r,s,t],$$

在 $x_{rs}$ 为主要变数或补充变数而 $e_r$，$e_s$ 的公共节点即树根 $O$ 时，置 $x'_{rs} = x_{rs}$。在 $x_{rs}$ 为多余变数时，则置

$$x_{rs}' = 0。$$

试证这样的 $x_{rs}'$ 满足上述方程组。为此，设 $e_i, e_j, e_k \in G^1$ 的公

共节点与$O$不同而自此至$O$的通道在此节点处的节段为$e_l$。若$e_l$即为$e_i,e_j,e_k$之一例如$e_l=e_k$，则将有

$$[i,j,k]'=[i,j,l]'=x'_{il}+x'_{jl}+x'_{ij}=x'_{ij}=[i,j,l]。$$

若$e_l$不与$e_i,e_j,e_k$相同，则将有

$$\begin{aligned}[i,j,k]'&=[i,j,l]'+[i,k,l]'+[j,k,l]'\\&=[i,j,l]+[i,k,l]+[j,k,l]\\&=[i,j,k]。\end{aligned}$$

若$e_i,e_j,e_k\in G^1$以$O$为公共节点则$[i,j,k]'=[i,j,k]$甚显然，故引理得证。

**基本定理Ⅱ** 对$G$的最大树$T$与选定的根$O$而言，若基本方程组（Ⅰ）可解，则必有一解答，它的多余变数都$=0$。对于扩充方程组（$\bar{Ⅰ}$）亦然。

**证** 已知方程组（Ⅰ）等价于方程组（Ⅰ）′与（Ⅰ）″。但（Ⅰ）′与（Ⅰ）″各可写作如下形式：

$$[ars]+[brs]=\varphi_{\alpha\beta}, \qquad (Ⅰ)'$$

$$[rst]+[abc]=\varphi_{\alpha\beta}。 \qquad (Ⅰ)''$$

由引理，上方程组有解时，下方程组也有解：

$$\begin{cases}[ars]'+[brs]'=\varphi_{\alpha\beta},\\ [rst]'+[abc]'=\varphi_{\alpha\beta},\\ x'_{rs}=0,\ (x_{rs}=\text{多余变数时})\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}x'_{ar}+x'_{as}+x'_{br}+x'_{bs}=\varphi_{\alpha\beta},\\ x'_{rs}+x'_{rt}+x'_{st}+x'_{ab}+x'_{ac}+x'_{bc}=\varphi_{\alpha\beta},\\ x'_{rs}=0,\ (x_{rs}=\text{多余变数时})\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\Sigma_0' + \Sigma_1' + \Sigma_2' = \varphi_{\alpha\beta}, \\ x'_{rs} = 0, \quad (x_{rs} = \text{多余变数时}),\end{cases}$$

有解，其中 $\Sigma'$ 即在 $\Sigma^0$ 中将 $x_{ij}$ 都易为 $x'_{ij}$ 而得。因之当（Ⅰ）有解时，（Ⅰ）必有一解答它的多余变数都 $=0$。对（$\tilde{I}$）亦然，证毕。

**定义** 基本方程组的一组解答将称为 $T$-侵入 $f$ 的一个基本解（对 $T$ 与 $O$ 而言）。同样，扩充方程组的任意一组解答将称为 $f$ 的一个扩充解，多余变数都 $=O$ 的解答则将称为 $f$ 的简化解。

**附注**：如果将线性图 $G$ 改变为 $G'$，使对每一 $e_a \in G^1 - T^1$，在 $e_a$ 上添入两个新顶点而分之为三段 $e_{a_1}$，$e_{a_2}$，$e_{a_3}$，其中 $e_{a_3}$ 为 $e_a$ 上中间的一段，将 $e_{a_1}, e_{a_2}$ 添入 $T$ 而成 $T'$，则 $T'$ 是 $G'$ 的一个最大树，于是对 $G', T'$ 而言，方程组（Ⅰ）与（$\tilde{I}$）除不足道者外将只出现图 1 与图 3 两种情形，而不再出现图 2 与图 4—8 等情形，若对 $G'$ 的每一变数，例如 $x_{a_i i}$ 的下角出现 $a_1$，$a_2$，$a_3$ 者都易 $a_\lambda$ 为 $a$，即可重行获得对 $G, T$ 的相应方程组，因之前面分析的许多情形实际上可以统一起来。

## 五、平面图的具体作法

我们已在四中给出了 $G \subset R^2$ 的必要条件：基本方程组（Ⅰ）或扩充方程组（$\tilde{I}$）有解。本节将证明，这个条件也是充分的，并将给出从方程组（Ⅰ）或（$\tilde{I}$）的一个解答具体作图的方法。

**调整**

为了要将一具有平面性的线性图 $G$ 在平面中具体作出，须

将一不完全是嵌入的$T$-浸入逐步改变成一嵌入，为此引入调整概念如下。

设$f:G\subset R^2$是一$T$-浸入，$v\in G^0=T^0$的干道$\mathscr{P}_v$中在$v$处的节段为$e_s$*。设$e_i,e_j\in G^1$为在$v$处不同于$e_s$的任意两棱。设在$f$之下，自$e_s$起，绕$v$作顺钟向旋转时，在$v$处的诸棱依次为

$$e_s,e_{p1},\cdots,\ e_{p\lambda},e_i,e_{q1},\cdots,e_{q\mu},e_j,e_{r1},\cdots,e_{r\gamma}。$$

今另作一$T$-浸入$g:G\subset R^2$，满足以下诸条件：

(1) 在$g$之下，自$e_s$起，绕$v$作顺钟向旋转时，在$v$处的诸棱依次为

$$e_s,e_{p1},\cdots,e_{p\lambda},e_j,e_{q1},\cdots,e_{q\mu},e_i,e_{\gamma1},\cdots,e_{r\nu}。$$

(2) 在任一不同于$v$的顶点$w$处，绕$w$作顺钟向旋转时，在$w$处的诸棱在$f$下与在$g$下的次序相同。

这样的$g$必然存在，我们将称之为将$e_i,e_j$互易的$f$的一个调整。

**调整定理(特殊形式)** 设$f:G\subset R^2$是一$T$-浸入。设$e_i,e_j\in G^1$都在节点$v_0$处，不位于干道$\mathscr{P}_{v_0}$上，且$e_i,e_j$在$f$下处于相邻位置。今调整$f$为$T$-浸入$g$，使$e_i,e_j$互易。则当$f$有一组扩充解$x_{\lambda\mu}=c_{\lambda\mu}$时，$g$也有一组扩充解$x_{\lambda\mu}=d_{\lambda\mu}$，这里

$$d_{\lambda\mu}=\begin{cases}c_{\lambda\mu}+1, & (\lambda,\mu)=(i,j),\\ c_{\lambda\mu} & (\lambda,\mu)\neq(i,j)。\end{cases}$$

再者，若$(c_{\lambda\mu})$对根$O$而言是$f$的一组简化解，则$(d_{\lambda\mu})$也是$g$的一组简化解。

---

* 在$v$=树根$O$时，可在$G$中添入一棱$e_0$以$O$为其一端，于是$e_s$将取为$e_0$。

证　设 $f,g$ 的示嵌链各为 $\varphi=\Sigma\varphi_{\alpha\beta}e_\alpha{}^*e_\beta$，$\psi=\Sigma\psi_{\alpha\beta}e_\alpha{}^*e_\beta$，则 $(c_{\lambda\mu})$为下扩充方程组的解：

$$\begin{cases}(\bar{\text{I}})'_f & x_{ar}+x_{as}+x_{br}+x_{bs}=\varphi_{\alpha\beta},\\(\bar{\text{I}})''_f & x_{rs}+x_{rt}+x_{st}+x_{ab}+x_{ac}+x_{bc}=\varphi_{\alpha\beta}\,\text{。}\end{cases}$$

我们须证 $(d_{\lambda\mu})$ 为下扩充方程组的解：

$$\begin{cases}(\bar{\text{I}})'_g & x_{ar}+x_{as}+x_{br}+x_{bs}=\psi_{\alpha\beta},\\(\bar{\text{I}})''_g & x_{rs}+x_{rt}+x_{st}+x_{ab}+x_{ac}+x_{bc}=\psi_{\alpha\beta}\,\text{。}\end{cases}$$

在情形$(\bar{\text{I}})'$中，若 $v\neq v_0$ 或 $v=v_0$ 但$(a,r)$,$(a,s)$，$(b,r)$ $(b,s)$都$\neq(i,j)$，则$(e_a,e_b,e_r,e_s)$绕 $v$ 的顺序在 $f$ 下与在 $g$ 下二者相同，或至多 $e_a,e_b$ 互易，或 $e_r,e_s$ 互易，不论何时都有 $\psi_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}$。另一面又有 $d_{ar}=c_{ar},\cdots,d_{bs}=c_{bs}$。因之当$(c_{\lambda\mu})$满足$(\bar{\text{I}})'_f$时，$(d_{\lambda\mu})$ 将满足相应的$(\bar{\text{I}})'_g$。反之，若 $v=v_0$，而在 $(a,r)$，$(a,s)$，$(b,r)$，$(b,s)$中有一，例如$(a,r)=(i,j)$，因而在 $f$ 下绕 $v$ 的诸棱中 $e_a$ 与 $e_r$ 相邻(见图 12)，则将有 $\psi_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}+1$，$d_{ar}=c_{ar}+1$，$d_{as}=c_{as}$，$d_{br}=c_{br}$，$d_{bs}=c_{bs}$。因而当 $(c_{\lambda\mu})$ 满足$(\bar{\text{I}})'_f$时，$(d_{\lambda\mu})$ 仍将满足相应的$(\bar{\text{I}})_g'$。

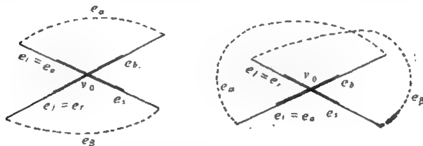



图 12

其次，在情形$(\bar{\text{I}})''$中，若 $v,w$ 都$\neq v_0$ 或 $v=v_0$ 但 $(a,b)$，$(a,c)$，$(b,c)$都$\neq(i,j)$，或 $w=v_0$ 但$(r,s)$，$(r,t)$，$(s,t)$ 都$\neq(i,j)$，则显有 $\psi_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}$，$d_{rs}=c_{rs},\cdots$。故当 $(c_{\lambda\mu})$ 满足 $(\bar{\text{I}})_f''$

时，$(d_{\lambda\mu})$将满足相应的$(\tilde{I})_g''$。反之，若$v$，$w$中有一，例如$v=v_0$，又在$(a,b)$，$(a,c)$，$(b,c)$中有一，例如$(a,c)=(i,j)$，则将有（见图13）：

$$\psi_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}+1,\ d_{ac}=c_{ac}+1,\ d_{ab}=c_{ab},\cdots。$$

故$(c_{\lambda\mu})$满足$(\tilde{I})''_f$时，$(d_{\lambda\mu})$仍满足相应的$(\tilde{I})_g''$。其余情形亦同。这证明了定理的前一部分。

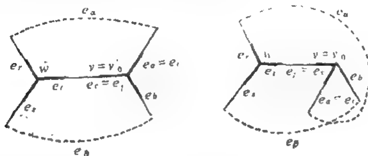


图 13

最后，因$e_i,e_j$都不在干道$\mathscr{P}_{v0}$上，故在简化解当$x_{\lambda\mu}$为多余变数而$c_{\lambda\mu}=0$时，同样亦有$d_{\lambda\mu}=0$，因之$(d_{\lambda\mu})$亦为一简化解。证毕。

**调整定理**（一般形式） 设$f:G\subset R^2$是一$T$-浸入，设$e_i$，$e_j\in G^1$在节点$v_0$处，不位于干道$\mathscr{P}_{v0}$上，且在$f$下$e_i,e_j$之间不含通道$\mathscr{P}_{v0}$的部分恰有$\mu$个棱$e_{q_1},\cdots,e_{q_\mu}$以$v_0$为端点。今调整$f$为$T$-浸入$g$，使$e_i,e_j$互易。则当$f$有一组扩充解$x_{\lambda\mu}=c_{\lambda\mu}$时，$g$也有一组扩充解$x_{\lambda\mu}=d_{\lambda\mu}$，这里

$$d_{\lambda\mu}=\begin{cases}c_{\lambda\mu}+1, & (\lambda\mu)=(i,j),\ (i,q_1),\cdots,(i,q_\mu),\ (j,q_1),\cdots\text{或}(j,q_\mu)。\\ c_{\lambda\mu}, & \text{在其他情形。}\end{cases}$$

再者，若$(c_{\lambda\mu})$对根$O$而言是$f$的一组简化解，则$(d_{\lambda\mu})$也是$g$

的一组简化解。

**证** 迭次应用特殊形式的调整定理即得。

**合格化**

设 $e_\alpha \in G^1 - T^1$，$C_\alpha = \{e_\alpha\} \cup \mathscr{P}_\alpha$，$f: G \subset R^2$ 为 $T$-浸入。假设对应于 $T$ 以及根 $O$ 而言，$f$ 的扩充方程组（$\tilde{I}$）可解且有一组简化解$(c_{\lambda\mu})$。如果下面的条件满足，则称 $f$ 对 $e_\alpha$ 合格而$(c_{\lambda\mu})$是 $f$ 对 $e_\alpha$ 的一组合格解。条件是：

(C) 对任一$e_i \in (C_\alpha)^1$，以及任一与 $e_i$ 有公共顶点的 $e_j \in G^1$，有 $c_{ij} = 0$。

如果 $f$ 对 $e_\alpha$ 不合格，因而有 $e_i \in (C_\alpha)^1$，以及与 $e_i$ 有公共顶点的 $e_j \in G^1$ 使 $c_{ij} = 1$。依据调整定理，如果将每一对这样的 $e_i$，$e_j$ 互易或改变$(c_{\lambda\mu})$，则可调整 $f$ 为一 $T$-浸入 $g$，使 $g$ 对 $e_\alpha$ 合格，且从$(c_{\lambda\mu})$依调整定理所得对 $g$ 的一组解答 $(d_{\lambda\mu})$ 是 $g$ 对 $e_\alpha$ 的一组合格解。这个从 $f$ 调整为 $g$ 的手续将称为 $f$ 对 $e_\alpha$ 的合格化。显然，在调整过程中可取这样的 $g$，使 $g$ 与 $f$ 在 $C_\alpha$上相合。

**引理** 设 $e_\alpha \in G^1 - T^1$，$f: G \subset R^2$ 是一 $T$-浸入，对 $e_\alpha$ 合格。则可改变 $f$ 为一 $T$-浸入 $g$，使 $g \equiv f/T \cup \{e_\alpha\}$，且：

(1) 对任一$\neq e_\alpha$ 的 $e_\beta \in G^1 - T^1$，$e_\beta$ 与 $e_\alpha$ 在 $g$ 下至多在公共顶点处相遇。

(2) 对任一$\neq e_\alpha$ 的 $e_\beta \in G^1 - T^1$，$g$ 与 $f$ 在 $e_\beta$ 的两端的邻近相合。

**证** 记 $e_\beta$ 的两端为 $a_\beta, b_\beta$。若 $a_\beta$（或 $b_\beta$）不在 $\mathscr{P}_\alpha$ 上，则置 $a'_\beta = a_\beta$（或 $b'_\beta = b_\beta$）。若 $a_\beta$（或 $b_\beta$）在 $\mathscr{P}_\alpha$ 上，则取 $e_\beta$ 内部充分邻近 $a_\beta$（或 $b_\beta$）的一点为 $a'_\beta$（或 $b'_\beta$）。

今设 $\mathscr{P}_\beta$ 不与 $\mathscr{P}_\alpha$ 相遇，则 $a'_\beta = a_\beta$ 与 $b'_\beta = b_\beta$ 在 $f$ 下必

同在 $C_\alpha$ 之内或同在 $C_\alpha$ 之外。

若 $\mathscr{P}_\beta$ 与 $\mathscr{P}_\alpha$ 相遇于一点，则对 $e_\alpha, e_\beta$ 的扩充方程有形式 $(\bar{I})'$。由于 $f$ 对 $e_\alpha$ 合格，故方程左端的诸 $x_{ij}=c_{ij}$ 都 $=0$，因而 $\varphi_{\alpha\beta}=0$，故此时在 $f$ 下 $a'_\beta$ 与 $b'_\beta$（只须充分接近 $a_\beta, b_\beta$）仍同在 $C_\alpha$ 之内或同在其外。

若 $\mathscr{P}_\beta$ 与 $\mathscr{P}_\alpha$ 相遇于一段通道，则相应的扩充方程有形式 $(\bar{I})''$。此时由于 $f$ 对 $e_\alpha$ 合格，方程左端的诸 $x_{ij}=c_{ij}$ 都 $=0$，而仍得同样结论。

故不论何时，在 $f$ 下 $a'_\beta$ 与 $b'_\beta$ 都将同在 $C_\alpha$ 之内或外。因而可改变 $f$ 在 $a'_\beta b'_\beta$ 的部分，使在所得 $g$ 之下 $a'_\beta b'_\beta$ 不再与 $e_\alpha$ 相遇，如所欲证。

**引理** 设 $e_\alpha \in G^1 - T^1$，以及 $T$-浸入 $f, g: G \subset R^2$ 如上一引理，这里 $f$、$g$ 都对 $e_\alpha$ 合格。于是 $g$ 对 $e_\alpha$ 有一组合格（简化）解 $(c_{\lambda\mu})$ 不仅满足 $(C)$ 且满足下述条件

$(C)_\alpha^*$　对任意在 $(C_\alpha)^1$ 上有公共顶点的 $e_i, e_j \in G^1$，只须 $e_i, e_j$ 中一在 $C_\alpha$ 之内而一在 $C_\alpha$ 之外（除公共顶点外），即有 $C_{ij}=0$。

**证** 已知 $g$ 有一组合格（简化）解 $(c'_{\lambda\mu})$ 满足条件 $(C)$。今依下方式改变 $(c'_{\lambda\mu})$ 为 $(c_{\lambda\mu})$：若与 $c_{ij}$ 对应的 $e_i, e_j$ 如 $(C)_\alpha^*$ 中所示，则令 $c_{ij}=0$，否则置 $c_{ij}=c'_{ij}$。于是 $(c_{\lambda\mu})$ 满足条件 $(C)$ 与 $(C)_\alpha^*$，我们只须证明 $(c_{\lambda\mu})$ 满足 $g$ 的扩充方程组即可。

设方程中不出现任何 $x_{ij}$，此处 $e_i, e_j$ 如 $(C)_\alpha^*$ 中所示时，对方程中出现的诸 $x_{\lambda\mu}$ 将有 $c_{\lambda\mu}=c'_{\lambda\mu}$。由于 $(c'_{\lambda\mu})$ 满足这一方程，故 $(c_{\lambda\mu})$ 亦然。

其次试考虑任一对以 $C_\alpha$ 上一点 $v$ 为公共顶点的 $e_i, e_j \in G^1$，此处 $e_i$ 在 $c_\alpha$ 之内而 $e_j$ 在 $C_\alpha$ 之外（除公共顶点 $v$ 以外）。于是

在 $g$ 的扩充方程组中有 $x_{ij}$ 的方程必如下产生：有 $e_\beta, e_r \in G^1 - T^1$ 使 $\mathscr{P}_\beta$ 含有 $e_i$ 而 $\mathscr{P}_r$ 含有 $e_j$。由上一引理的证明可知在 $g$ 下必有 $e_\beta$ 在 $C_a$ 之内而 $c_r$ 在 $C_a$ 之外（除可能在$\mathscr{P}_a$上的端点以外），且 $\varphi_{\beta r}=0$。

先设 $\mathscr{P}_\beta$，$\mathscr{P}_r$ 有一通道 $\mathscr{P}_{\beta r}$ 公共，则必有 $\mathscr{P}_{\beta r}\subset\mathscr{P}_a$ 且 $\mathscr{P}_{\beta r}$ 一端为 $v$，而另一端设为 $w$。相应的方程必如形式

$$x_{ij}+x_{ik}+x_{jk}+x_{rs}+x_{rt}+x_{st}=\varphi_{\beta r}=0。\tag{1}$$

此处 $e_k, e_t$ 位于通道 $\mathscr{P}_{\beta r}$ 上，$e_r$ 在$\mathscr{P}_\beta\cup\{e_\beta\}$上，$e_s$ 在$\mathscr{P}_r\cup\{e_r\}$上。$e_k$ 以 $v$ 为一端而 $e_r, e_s, e_t$ 以 $w$ 为一端。仍由上引理，在 $g$ 下 $e_r$ 在 $C_a$ 之内或$\mathscr{P}_a$之上，而 $e_s$ 在 $C_a$ 之外或 $\mathscr{P}_a$之上（端点可能除外）。由于 $(c_{\lambda\mu})$ 满足 $(C)_a{}^*$故不论何时都有

$$c_{ij}=c_{ik}=c_{jk}=c_{rs}=c_{rt}=c_{st}=0。$$

因而 $(c_{\lambda\mu})$ 满足(1)。

其次设$\mathscr{P}_\beta$，$\mathscr{P}_r$ 只有 $v$ 点公共，则相应的方程形如

$$x_{ij}+x_{il}+x_{kj}+x_{kl}=\varphi_{\beta r}=0,\tag{2}$$

此处 $e_k, e_l$ 各在 $\mathscr{P}_\beta\cup\{e_i\}$与 $\mathscr{P}_r\cup\{e_j\}$上而以 $v$ 为端点。与前同样不论何时都有 $c_{ij}=c_{il}=c_{kj}=c_{kl}=0$，因而$(c_{\lambda\mu})$满足(2)。

由此知 $(c_{\lambda\mu})$ 满足 $g$ 的扩充方程组，如所欲证。

**作图法**

设有线性图 $G$。今取一最大树 $T$ 与根 $O$。任取一 $T$-浸入 $f:G\subset R^2$。假设其相应示嵌链 $\varphi\sim0$。依基本定理Ⅰ，扩充方程组（$\bar{I}$）有一简化解$(c_{ij})$。今将诸 $e_a\in G^1-T^1$ 排成一次序 $e_{a1}$, $e_{a2},\cdots,e_{aS}$。依调整定理从 $(c_{ij})$ 出发可改变 $f$ 为一 $T$-浸入 $f_1:G\subset R^2$,使对 $e_{a1}$ 合格，且由上两引理可使 $f_1$ 满足该二引理所说的条件，于是在 $f_1$ 下 $e_{a_2},\cdots,e_{aS}$ 都与 $e_{a1}$ 至多相遇于其公共顶点，且与 $f_1$ 相应的扩充简化解 $(c^1{}_{ij})$ 满足条件 $(C)_a{}^*{}_1$。仍

依调整定理从 $(c^1{}_{ij})$ 出发可改变 $f_1$ 为一 $T$-浸入 $f_2: G \circ\!\subset R^2$，以及一组相应的扩充简化解$(c^2{}_{ij})$，使对 $e_{a_2}$ 合格，且满足上两引理所说的条件（1）与$(C)^*{}_{a_2}$。由调整过程可知可取 $f_2$ 使对 $e_{a_1}$ 仍然合格且 $(C^2{}_{ij})$ 仍满足 $(C)^*{}_{a_1}$。于是在 $f_2$ 下 $e_{a_3}, \cdots, e_{a_s}$ 都与 $e_{a_1}$，$e_{a_2}$ 至多相遇于其公共顶点，$e_{a_1}$ 与 $e_{a_2}$ 亦然。改变 $f_2$ 使对 $e_{a_3}$ 合格，且使 $f_2$ 满足(1)，又使相应扩充简化解$(c^3{}_{ij})$满足条件$(C)^*{}_{a_3}$，依次进行最后即得一 $T$-浸入 $f_s: G \circ\!\subset R^2$ 对任一 $e_{a_k}$ 都合格，且任两 $e_{a_k}$ 与 $e_{a_l}$ 至多只相遇于其公共顶点。这样的一个 $T$-浸入实为一嵌入。因而 $G$ 已嵌入于平面 $R^2$ 中。

根据二中嵌入定理与上作图法，可得下面完全形式的

**嵌入定理*** 线性图 $G$ 具有平面性的充要条件为示嵌类

$$\Phi^2 = 0。$$

同样，三的基本定理 I 亦可重述之为：

**基本定理 I** $G$ 有平面性的充要条件为，对最大树 $T$ 而言，基本方程组（I）有解。

## 六、一些估计

在以下，$G$ 的顶点数与棱数将各设为 $m$ 与 $n$。

将前数节解法在计算机上实施时，最占存储量的是将线性方程组存入计算机的这一部分。如果未知数的个数是 $A$，则所占用计算机的字码 (bits) 数估计将为 $A^2$（方程的个数并不是主要的）。如果依照二所提及的方程组，$A$ 将约略等于 $m \cdot n$，但

---

* 嵌入定理的原来证明（见([ 7 ]) 须依据 Kuratowski 定理（[ 4 ]）。但本文的证明并不须要。

对于 §3-4 中所引入的简化了的基本方程组，此数将大为减少。而且，我们只要估计主要变数的个数即足，因为其余的变数可直接由主要变数表达出来而在计算机中不需要占用什么存储单元（这些方程直接可从 $G$ 与 $T$ 读出）。

为作这一估计，我们将先考虑下述特殊情形：

$G$ 的每一顶点都是三叉点，即每一顶点处都恰有三个棱以此为端点。

今作一最大树 $T$，取树根 $O$。设非节梢的节点数为 $r$，则节梢的个数为 $m-r$，其中恰有 $T$ 的三个节段以之为端点的节点数设为 $s$，则恰有两个节段以之为端点的节点数将为 $r-s$。由于 $T$ 中节段的个数是 $m-1$，故有

$$m-r+2(r-s)+3s=2(m-1)$$

或

$$r+s=m-2。$$

由于每一非节梢的节点恰恰给出一个主要变数，而在树根处又恰有两个主要变数，因而主要变数的个数 $A$ 将为

$$A=r+2=m-s\leqslant m,$$

由此并知选择 $T$ 时应使 $T$ 的三叉点数 $s$ 尽量的大，以使 $A$ 尽量的小。

在一般情形，我们将易 $G$ 为一只有三叉点的线性图 $G'$，使 $G$ 中每一个 $k$ 叉点（$k\geqslant3$）易为 $G'$ 中 $k-2$ 个三叉点图 14 所示：

设 $G$ 中无二叉点，而 $k$ 叉点的个数为 $m_k(k\geqslant3)$，则 $G'$ 中三叉点的个数将为

$$m'=\Sigma(k-2)m_k。$$

因 $G$ 的顶点数为 $m$，棱数为 $n$，故有

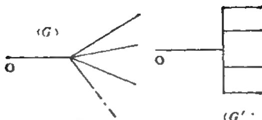


图 14

$$m=\Sigma m_k,$$

$$2n=\Sigma k m_k\text{。}$$

由此得 $$m'=2(n-m)\text{。}$$

对于$G'$的主要变数个数因之将为

$$A'\leqslant 2(n-m)\text{。}$$

由于在一个电路中线路可以假定是没有电阻的，因之与任一电路相应的线性图$G$恒可易为只有三叉点的线性图$G'$而无损于一般性。故恒可取上面的公式来估计需解线性方程组的未知数个数，由此以估计计算机中需占用的存储量。

## 七、杂　例

例1　Kuratowski 第一类非平面性线性图（见图15）。

取最大树$T$，根$O$及$T$-浸入$f$如右图。主要变数为

$$x_{28},\ x_{37}x_{46},\ x_{58},\ \text{以及 } O \text{ 处} x_{16},\ x_{19}\text{。}$$

基本方程组(已简化)为：

$$I_f(e_6,e_7)=1=x_{37}+x_{46},$$

$$I_f(e_6,e_8)=0=x_{28}+x_{46},$$

$$I_f(e_7,e_8)=0=x_{37}+x_{58},$$

$$I_f(e_8,e_9)=0=x_{28}+x_{58},$$

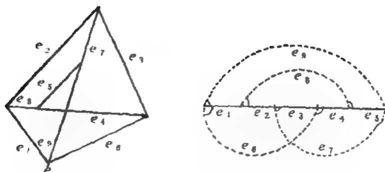



图 15

$$I_f(e_6, e_9) = 0 = x_{46} + x_{16} + x_{19},$$

以及 $$I_f(e_7, e_9) = 0 = x_{37}。$$

因方程组矛盾，故原图形是非平面性的。但若除去 $e_9$，则相应方程组有解（简化解）为：

$$(x_{28}, x_{37}, x_{45}, x_{58}) = (0, 1, 0, 1),$$

$$或 = (1, 0, 1, 0)。$$

而 $x_{16}$ 任意。今取 $x_{16} = 0$ 而从这两解进行合格化调整，可得两个具体嵌入各如下二图所示：

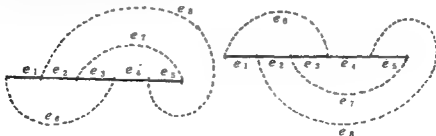



图 16

**例 2　Kuratowski 第二类非平面性线性图(见图 17)**

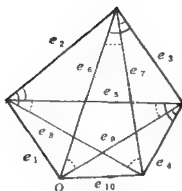



图 17

取最大树 $T$，树根 $O$，与 $T$-浸入 $f$ 如图。已简化的基本方程组为

$$I_f(e_5,e_6)=1=x_{25}+x_{36},$$
$$I_f(e_5,e_7)=1=x_{45}+x_{37},$$
$$I_f(e_6,e_8)=1=x_{28}+x_{36},$$
$$I_f(e_7,e_9)=1=x_{37}+x_{49},$$
$$I_f(e_8,e_9)=1=x_{28}+x_{49},$$
$$I_f(e_5,e_{10})=0=x_{25}+x_{45}。$$

由此知 $e_{10}$ 须除去以平面化，记所余图形为 $G'$。相应基本解为：

$$(x_{25},x_{28},x_{36},x_{37},x_{45},x_{49})$$
$$=(0,0,1,0,1,1)$$

或

$$=(1,1,0,1,0,0)$$

而 $x_{16},x_{19}$ 任意。

补充变数 $x_{58},x_{67},x_{59},x_{78},x_{69}$ 可自以下补充方程求得：

$$I_f(e_5,e_8)=0=x_{58}+x_{45},$$

$$I_f(e_6, e_7) = 0 = x_{67} + x_{369}$$

$$I_f(e_5, e_9) = 0 = x_{59} + x_{259}$$

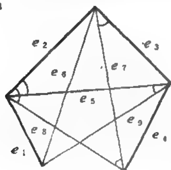
$$I_f(e_7, e_8) = 0 = x_{78} + x_{379}$$

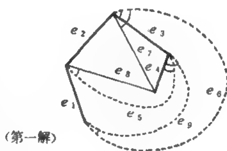
$$I_f(e_6, e_9) = 0 = x_{69} + x_{36} + x_{16} + x_{19}。$$

取$x_{16} = x_{19} = 0$，则由此所得两扩充解列表如下：

| | 基本变数 | | | | | | 补充变数 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_{25}$ | $x_{28}$ | $x_{36}$ | $x_{37}$ | $x_{45}$ | $x_{49}$ | $x_{58}$ | $x_{67}$ | $x_{59}$ | $x_{78}$ | $x_{69}$ |
| 第一解 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 第二解 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

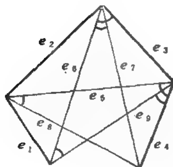
依据两解经合格化调整所得图形与原图比较，各如下所示：

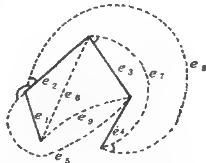



（第一解）

图 18




（第二解）

图 19

例 3　考虑线性图 $G$，最大树 $T$，树根 $O$ 与 $T$-浸入 $f$ 如图：

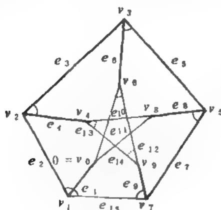



图 20

| 所处顶点 | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | $v_9$ | $O=v_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 主要变数 | $x_{2,15}$ | $x_{34}$ | $x_{56}$ | | $x_{78}$ | | $x_{9,15}$ | | | $x_{1,11}$ $x_{1,14}$ |
| 补充变数 | | | | $x_{10,13}$ | | $x_{11,12}$ | | $x_{10,14}$ | $x_{12,13}$ | $x_{11,14}$ |

**基本方程**

$$I_f(e_{10},e_{11}) = 1 = x_{34} + x_{56},$$

$$I_f(e_{10},e_{12}) = 1 = x_{56} + x_{78},$$

$$I_f(e_{11},e_{13}) = 1 = x_{34} + x_{56},$$

$$I_f(e_{12},e_{14}) = 1 = x_{56} + x_{78},$$

$$I_f(e_{13},e_{14}) = 1 = x_{34} + x_{78}.$$

由此知 $e_{14}$ 应从 $G$ 中除去，而最后两方程可以略去。

$$I_f(e_{11},e_{15}) = 0 = x_{56} + x_{2,15},$$

$$I_f(e_{14},e_{15}) = 0 = x_{78} + x_{2,15},$$

由此知 $e_{15}$ 应从 $G$ 中除去。

命除去 $e_{14}, e_{15}$ 后的图形为 $G'$。此时主要变数只有 $x_{34}, x_{56}, x_{78}$ 以及 $x_{1,11}$。基本方程只有两个：

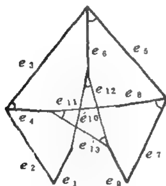
$$\begin{cases} x_{34} + x_{56} = 1, \\ x_{56} + x_{78} = 1. \end{cases}$$

此时补充变数也只有三个：$x_{10,13}$，$x_{11,12}$，$x_{12,13}$。补充方程为：

$$\begin{cases} I_f(e_{10}, e_{13}) = 0 = x_{10,13} + x_{78}, \\ I_f(e_{11}, e_{12}) = 0 = x_{11,12} + x_{56}, \\ I_f(e_{12}, e_{13}) = 0 = x_{12,13} + x_{56}. \end{cases}$$

| | 主要变数 | | | 补充变数 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_{34}$ | $x_{56}$ | $x_{78}$ | $x_{10,13}$ | $x_{11,12}$ | $x_{12,13}$ |
| 第一解 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 第二解 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

（$x_{1,11}$ 任意，可取为 0）




第 ·解

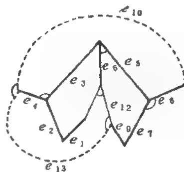



图 21

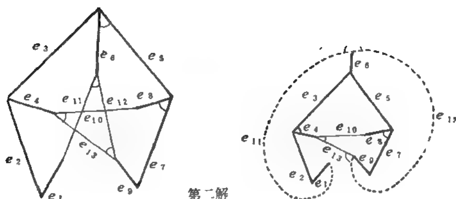



图22

## 参 考 资 料


[1] L. Auslander. S. V. Parter, On imbedding graphs in the sphere, J. Math. Mech., 10 (1961), 517—523.

[2] W. Bader, Topologische Problem der gedruckten Schaltung und seine Lösung, Archiv für Elektrotechnik, 49 (1964),2—12

[3] G. J. Fisher-O. Wing, Computer recognition and extraction of planar graphs from the incidence matrix, IEEE: Trans· on Cricuit Theory, CT-13 (1966) 154—163.

[4] C. Kuratowski, Sur le probleme des courbes gauches en topol-ogie, Fund. Math. 15 (1930), 271—283.

[5] S. MacLane, A combinatorial condition for planar graphs, Fu-nd. Math. 28 (1937). 22—32.

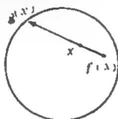
[6] H. Whitney, Non-separable and planar graphs, Trans. Amer· Math. Soc. 34 (1932), 339—362.

[7] 吴文俊，复合形在欧氏空间中的实现问题，Ⅰ，Ⅱ，数学学报，5 (1955), 505—552; 8 (1958), 79—94.

# 拓扑中的量度与能计算性

恩格斯说过，数学研究现实世界中的空间形式与数量关系。空间形式与数量关系这两基本范畴之间，则往往通过量度概念联系起来。曲线的长度，多边形的面积，立体的体积，点集的测度，都是这种量度的具体实例。在历史上，量度往往指空间形式的某种度量性质。因之，作为以拓扑空间这种空间形式某些非度量性质的定性研究为主要任务的拓扑学，表面看来似乎与量度概念无关，但是，数量关系并非是一个单独或若干个数，而可广义地理解为某种数系统（或代数系统），如群、环、模、代数等等，因而，在这种广义的理解下，拓扑学中就有着极为丰富的量度。举例来说，拓扑空间的 0 维 Betti 数是一种量度，它代表空间连通分支的个数，1 维 Betti 数也是一种量度，它代表空间在某种意义下相互独立的闭圈个数，某种类型拓扑空间的尤拉数又是一种量度，它在拓扑学中的作用是颇为基本的。不仅这些个别的数可以看作拓扑空间的量度，而且在拓扑学发展过程中，还出现了各种以代数系统表达的各种量度，同调群或环，同伦群，$k$ 环，以及最近出现的极小模型或 $I^*$—量度等，这些量度都反映了拓扑空间一定的拓扑性质。代数拓扑学正是由于这些量度的引入而蓬勃发展起来，而且还解决了不少数学其他领域中的难题，使代数拓扑学从无到有，成为二十世纪中令人瞩目的一个大学科。试举几个简单实例来说明量度在拓扑学中的作用。

例 1　设 $D^n$ 是 $n$ 维单位球体，$S^{n-1}$ 是它的 $n-1$ 维球面，$f$ 是 $D^n$ 到它自身的连续映像。Bronwer 一个著名的不动点定理是说：$f$ 必有一不动点，即必有一点 $x$ 使 $f(x)=x$。Bronwer 定理有许多不同的证明，它们往往需要一些巧思，依据量度的概念则可提供一个较简单的证明如下。




我们用反证法，假设 $f$ 无不动点，则对任一 $x\in D^n$，从 $f(x)$ 到 $x$ 的射线将与 $S^{n-1}$ 交于一点 $g(x)$，于是 $g$（显然与 $f$ 一样是连续的）有下面的性质：如果 $x\in S^{n-1}$，则 $g(x)=x$。现在假设有一种拓扑空间的量度 $M$，它是一种代数系统，具有以下一些性质（拓扑空间假定属于某种固定的类型，映像指连续映像）：

（1）对拓扑空间 $X$，$Y$ 与映像 $f$：$X\to Y$，引出一代数同态 $f_*$：$M(X)\to M(Y)$（或 $f^*$：$M(Y)\to M(X)$）。

（2）对拓扑空间 $X,Y,Z$ 与映像 $f$：$X\to Y$，$g$：$Y\to Z$，下面的代数同态图是可交换的，即 $(gf)_*=g_*f_*$（或 $(gf)^*=f^*g^*$）：

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{(gf)_*} & M(Z) \\ & {\scriptstyle f_*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle g_*} & \\ & M(Y) & \end{array} \quad 或 \quad \begin{array}{ccc} M(X) & \xleftarrow{(gf)^*} & M(Z) \\ & {\scriptstyle f^*}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle g^*} & \\ & M(Y) & \end{array}$$

（3）若 $id$ 是拓扑空间 $X$ 到 $X$ 的恒同映像，则 $(id)_*$：$M(x)\to M(X)$（或 $(id)^*$：$M(X)\to M(X)$）是 $M(X)$ 的恒同同态。

（4）$M(D^n)=0$，而 $M(S^{n-1})\neq 0$，

回到原来的 Bronwer 定理，记$S^{n-1}$到$D^n$的嵌入映像为$f_0$。$S^{n-1}\to D^n$，则 $gf_0$：$S^{n-1}\to S^{n-1}$ 即恒同映像，因而依据(1)、(2)有可交换图：

$$\begin{array}{ccc} M(S^{n-1}) & \xrightarrow{(id)_*} & M(S^{n-1}) \\ & f_{0*}\searrow \quad \nearrow g_* & \\ & M(D^n) & \end{array} \text{或} \begin{array}{ccc} M(S^{n-1}) & \xrightarrow{(id)^*} & M(S^{n-1}) \\ & f_0^*\nwarrow \quad \swarrow g^* & \\ & M(D^n) & \end{array}$$

但这些图显然与(3)、(4)冲突，由此知 $f$ 无不动点的假设不成立，因而 Bronwer 定理得证。

任何一种具有性质(1)—(4)的量度都可用来证明Bronwer定理，这样的量度有 $H_{n-1}$, $H^{n-1}$(下或上同调群，系数群任意)，$\pi_{n-1}$（同伦群）等。

例 2　设线性图$G$，$G$是否能嵌入平面是在理论上与实际上都极为重要的问题。1930 年以来 Kuratowski，Whitney，MacLane 等都给出了$G$能嵌入平面的充要条件，但这些条件都只是从问题的这一形式转变为另一形式，而且是“定性”的，要据之以检查一个具体的图是否能嵌入平面是困难的。我们则应用拓扑的某些量度给出了平面嵌入的“定量”的充要条件如下：从$G$作拓扑积$G\times G$，在其中除去$\sigma_1,\sigma_2$有公共顶点的那些胞腔$\sigma_1\times\sigma_2$($\sigma_1,\sigma_2$是$G$的顶点或棱)，对余下的部分恒同$\sigma_1\times\sigma_2$与$\sigma_2\times\sigma_1$为$\sigma_1*\sigma_2=\sigma_2*\sigma_1$($\sigma_1$，$\sigma_2$无公共顶点)，称所得复形为$G*G$，于是$H^2(G*G,Z_2)$可视为$G$的一种量度。在其中还可挑出一个特定的元素$\Phi^2$，它也是$G$的一种量度。我们的定理是：

$$G\text{ 可嵌入平面}\Longleftrightarrow\Phi^2=0\text{。}$$

对于任意一个线性图$G$，$\Phi^2$可通过具体计算知道它是否$=0$，因而可由计算得知$G$是否能嵌入平面，这给出了这一问题解答的有效方法。

上面的条件还可进一步简化成下面的形式：从$G$可得出模2系数的线性方程组，它的有解与否是$G$能否嵌入平面的充要条件。

任意给一个线性图$G$，$G$能嵌入平面的情况是绝无仅有的。依据上面的线性方程组，我们容易得出应在$G$中丢弃哪一些棱，使余下的图$G'$能嵌入平面，而且还可据以指出$G'$嵌入平面的具体做法，以及不同嵌入的种数。这些步骤都是算法的，不难在计算机上予以实现。

上面两个简单实例说明，量度在现代拓扑学中的作用。但是，要使某种量度在应用上真正有效，必须具备若干条件。首先是不变性，应用于拓扑的量度必须是拓扑不变的，或者对所考虑的对象与问题要求同伦不变、组合不变、微拓不变等，正象古典几何中要求量度必须是量度不变或投影不变那样，否则这种量度将在根本上失去意义。其次是有限性，即量度能用例如有限个基所生成等，这样才适于掌握处理。因而，一个拓扑空间的奇异链群或一个微分流形的 deRham 代数，虽然都是具有不变性的量度，由于它们超限生成而只能在推理过程中使用，但在定理的假设与终结中出现是不适宜的。除了这些隐含的要求之外，我们还提出：量度最好具有“能计算性”。这一概念可解释如下：在拓扑学中，经常要从若干给定的空间作出另一些新空间，例如从两个空间作拓扑积，沿某一部分粘合成拓扑和，作锥形，作吊形，作道路空间，作纤维丛等等。对于某种给定的量度$M$，经常要从所给空间$X_1$，$X_2$……的量度$M(X_1)$，$M(X_2)$，……定出所作新空间$Z$的量度$M(Z)$，如果$M(Z)$可以完全由$M(X_1)$，$M(X_2)$……以及反映这些空间$X_i$相互间几何关系的$M(X_i)$的代数关系所完全决定，我们就说量度$M$对于所考虑的

几何作法是“能计算的”，否则是“不能计算的”。

不言而喻，能计算的量度将给解决问题带来极大的方便，因而在应用上会有较大的威力。遗憾的是，在拓扑中广泛使用的种种量度，如同调，同伦等群或环，即使对极为简单的几何作法，也是“不能计算的”。例如：

(1) 对于空间的拓扑积作法，实系数上同调环 $H_R^{**}$ 与整系数上同调群 $H_Z^{*}$ 都是能计算的，但整系数上同调环 $H_Z^{**}$ 则是不能计算的*。

(2) 对于两个空间沿一公共子空间的粘合作法，实系数的上同调群 $H_K^{*}$ 是能计算的，但实系数上同调环 $H_k^{**}$ 或整系数上同调群 $H_Z^{*}$ 都是不能计算的。

以上(1)、(2)中能计算的部分各相当于 Künneth 公式与 Mayer-Vietoris 的序列，其中不能计算的部分则由简单实例可以证实。

拓扑学中的许多推理论证往往是迂回曲折的，其原因之一可能是拓扑中的主要工具——经典的同调，同伦等量度都往往是不能计算的。因而在推理过程中对于新出现空间的量度无法确定，而只能获得部分信息，而且还需要运用巧思走着迂回曲折的道路才能获得。这固然使拓扑学增添了引人入胜的色彩，但也增加了拓扑学研究的困难，为更高的发展添置障碍。

在七十年代时出现了一种新的量度，它与经典量度的不同之处，是它具有高度的能计算性。

这一量度我们记之为 $I^*$，乃是美国拓扑学家 D.Sullivan 所引进。对于任一复形 $K$，可与微分流形那样构造外微分形式

* 与传统的记法相异，我们把上同调 $H$ 中的系数群或环写在 $H$ 的右上角，以 * 表群而以 * * 表环结构。

所定的代数 $A^*(K)$。这里 $A^*$是一种量度，它是具有微分运算的实域上分次代数(简称 $DGA$)，我们称之为 deRham-Sullivan 代数。由于 $A^*$是超限的，因而它本身是没有多大独立的意义的。但是在$K$ 有某些限制，例如单连通以及每一维数的 $H_R^*$都是有限生成时，Sullivan 从 $A^*$ 纯代数地作出它的极小模型 $MinA^*$，记之为 $I^*$，则 $I^*$在每一维数都将有限生成而满足所谓有限性的条件。这一量度 $I^*$又是同伦不变的，它包含了同伦同调中无限部分的全部信息。除此以外，我们从能计算的角度出发，对各种通常的几何作法证明了 $I^*$ 量度都是能计算的，并给出了计算的具体表达式。在应用上，我们证明了不少过去用谱序列经过迂回曲折的推理在极强的条件下才能获得的结果，应用 $I^*$ 量度可以在很一般的情况下得之甚易。

自然，我们对于 $I^*$ 量度能计算性的研究局限于空间是单连通的情形，把它推广到较一般如所谓 nilpotent 空间应该不会是很难的，但我们没有这样做，因为这种推广是否必要，是否值得，是可以商榷的。真正的重要问题应该是：$I^*$量度虽然是包含了同伦同调的无限部分，但由于它是实域上的 $DGA$，因而同伦同调的有限部分无法在 $I^*$中得到反映。然而同伦同调的有限部分如挠系数之类都是应用上极其有力、成效卓著的武器，拓扑许多精彩的应用往往是通过它们取得的。如何推广 $I^*$量度以包括同伦同调的有限部分而仍保有高度的能计算性，乃是一个有重大意义的课题。

自然，问题是十分困难的，虽然并不是没有线索可以入手。如果这个问题能够解决，则这一新的更广的 $I^*$ 量度将取所有同伦同调的量度而代之，它可能使拓扑学的发展重点以及方法方向都为之改观。

# 博奕论杂谈：(一)二人博奕

正象十七世纪时概率论的产生与一些赌博问题有关那样，在本世纪发展起来的博奕论也与一些赌博以及下棋中的数学问题有关。1921年法国的E.Borel为了用数学方法处理赌博一类问题，提出了“策略”这样一个概念，赌徒智力的高下就体现在是否能善于选择“策略”这一点上，这可以说是博奕论的萌芽。

我们先来举一个用扑克牌打赌的例子。甲乙两人各从一付扑克牌中选取5张后同时下注，赌注限定是$a$元或$b$元，此处$a>b>0$，如果甲乙都下大注（$a$元）或都下小注($b$元),则彼此摊牌，牌小者如注数付给牌大者（我们知道任意5张扑克牌组成的两组可以比较大小）；牌相同则不分胜负。如果甲下大注而乙下小注，则乙要求可以摊牌或认输。在乙认输时乙就付给甲$b$元，若乙要求摊牌，则乙牌小时须付甲$a$元，乙牌大时甲须付乙$a$元，牌相同时不分胜负，在甲下小注而乙下大注时也同样。

我们先问甲乙双方究有多少种不同的策略可取？

甲方取了牌以后，可以下大注，也可以下小注。如果甲下小注而发现对方下大注时，甲可以要求摊牌或是认输，因此总起来有三种可能的情形。所谓甲的一个“策略”，乃是甲所有可能发生的情况都决定了如何应付的一个全盘的方针。也就是对每5张选取的牌都必须考虑到三种应付方法的一种，因为从52

张扑克牌中选取5张共有$C^5_{52}=2,598,960$种方法，所以甲的策略总数$=3^{2,598,960}$。乙的策略总数也是一样。我们的问题是，甲乙在这许多策略中如何选出“最好”的策略来。

试再以下棋为例，所谓奕者的一个策略，乃是指从局始到局终就各种可能出现的情况都决定了应付之道的一个全盘的方针。自然，在所有常见的棋中，这样的策略的总数都是一个象恒河沙那样的大数，但总是一个有限的整数。所谓下棋下得高，就是善于在那恒河沙数的策略中尽可能选出较好的策略来。

虽然我们举的两个例子一“博”一“奕”，在表面上似乎至多只能是游戏一类的数学问题，可是就在那些例子里，就有一些因素是值得注意的：不论是博是奕，都有对立的两方进行竞赛，这种竞赛不仅有竞而且有争，这种对立的竞争，不仅出现在博奕中，在实际生活（例如体育竞赛），军事作战中，也都处处可见，博奕只是提供了这方面较显著也较简单因之较易分析掌握的实例，成为现在所谓博奕论思考问题时简单而具体的模型而已。事实上，就在E. Borel在1921年及其以后的一些博奕早期著作中，就已指出这方面的理论可能在商业，经济甚至军事上开阔应用数学方法的新途径。E. Borel还就在这方面举了一些例子，下面是其中的一个：

有甲乙两支军队，在三个战场上作战，每个战场上双方兵数相同，相持不下，此外甲乙都拥有15个团的兵力作为后备部队。问题是甲乙将后备部队向各个战场增援时，应如何分配兵力（以团为单位）可使在尽可能多的战场上取得优势，战胜敌人。在这个问题中，甲乙有多少策略可取，应用组合排列是很容易算出的，

在已举的三个例子中，如果甲乙都取定了策略，不论是好

是坏，那么在每一个具体的“博奕”过程中，胜负的情况就完全确定了，这个胜负的情况，在简单的场合，可以用一个数表示出来，例如在扑克一例中，可用乙应付甲的元数来表示。在下棋一例中，不妨在甲胜时以 $+1$ 表示，甲负时以 $-1$ 表示，和棋则以 0 表示，$+1$，$-1$ 与 0 三数也可以看做乙应付给甲的数，虽然这些数的规定是有些任意的。在军队作战的例中，也可以用一个数来表示胜负程度，这样做虽然把问题简单化了，但对于问题的实质是并无损害的。

综合上述，我们可以提出这样一个“博奕”问题：

甲乙双方进行某种“博奕”，其中甲有 $n$ 种策略可取，命之为 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，乙有 $m$ 种策略可取，命之为 $\eta_1,\cdots,\eta_m$。在甲取策略 $\xi_i$，乙取策略 $\eta_j$ 时，乙应付与甲 $a_{ij}$。问题是：甲乙应取何种策略，对甲乙说来都可以认为“最好”？

试先就甲方来考虑这一问题，设甲先取策略 $\xi_i$，乙方必取一策略使乙付与甲的值为最小，因之甲在这时只希望获得 $\underset{j}{\mathrm{Min}}\, a_{ij}$。因之，就甲方而言，他应选取这样的一个策略 $\xi_i$，使相应的 $\underset{j}{\mathrm{Min}}\, a_{ij}$ 有最大值。这时甲所能从乙方取得的值为 $\underset{i}{\mathrm{Max}}\, \underset{j}{\mathrm{Min}}\, a_{ij}=V_{甲}$。对甲最合适的策略为符合条件 $\underset{j}{\mathrm{Min}}\, a_{ij}=V_{甲}$ 的策略 $\xi_i$，暂时可称为甲的**最好策略**。

次就乙方考虑，设乙选取策略 $\eta_j$，则甲必将取一策略，使甲从乙取得的值为最大，因之乙在此时须付与甲 $\underset{i}{\mathrm{Max}}\, a_{ij}$，故就乙方而言，他应选取这样的一个策略 $\eta_j$ 使相应的 $\underset{i}{\mathrm{Max}}\, a_{ij}$ 有最小值，这时他付与甲方的值为 $\underset{j}{\mathrm{Min}}\, \underset{i}{\mathrm{Max}}\, a_{ij}=V_{乙}$，对乙最合适的策略为符合条件 $\underset{i}{\mathrm{Max}}\, a_{ij}=V_{乙}$ 的策略 $\eta_j$，暂时可称为乙的**最**

好策略。

因为对任意$\xi_k$，$\eta_l$有

$$\operatorname*{Min}_{j} a_{kj} \leqslant a_{kl} \leqslant \operatorname*{Max}_{i} a_{il},$$

故有

$$\operatorname*{Max}_{k} \operatorname*{Min}_{j} a_{kj} \leqslant \operatorname*{Min}_{l} \operatorname*{Max}_{i} a_{il},$$

或即
$$V_{甲} \leqslant V_{乙}。$$

今先设$V_{甲}=V_{乙}$。

此时设甲乙各自选取上面所说他们所认为的最好策略，设为$\xi_k$与$\eta_l$，则应有

$$V_{甲}=\operatorname*{Min}_{j} a_{kj} \leqslant a_{kl},$$

$$V_{乙}=\operatorname*{Max}_{i} a_{il} \geqslant a_{kl},$$

合之得
$$V_{甲} \leqslant a_{kl} \leqslant V_{乙}。$$

由$V_{甲}=V_{乙}$得

$$V_{甲}=V_{乙}=a_{kl}。$$

故乙方应支付甲方的值$a_{kl}$，在甲方说来这是他所能期望得到的最大值。在乙方说来，也是他所期望支出的最小值，故$\xi_k$，$\eta_l$确合于策略“最好”的要求。

但一般来说，亦可有

$$V_{甲}<V_{乙}。$$

这时由$V_{甲} \leqslant a_{kl} \leqslant V_{乙}$，

知至少有$a_{kl}>V_{甲}$，

或
$$a_{kl}<V_{乙}。$$

在前一情形，乙所支付与甲的值$a_{kl}$将较甲所预期获得的最大值$V_{甲}$为大，换言之，所谓乙的“最好”策略$\eta_l$实际上对乙说来并非“最好”。同样，在后一情形$a_{kl}<V_{乙}$时，甲从乙所取得

的值 $a_{kl}$ 将较乙所预期支付与甲的值 $V_{乙}$为小，换言之，所谓甲的“最好”策略 $\xi_k$，实际上对甲说来并非“最好”。

由此可知，在 $V_{甲}=V_{乙}$时，上述博奕是完全确定的，甲乙双方各知应如何选择最好的策略以进行这一博奕，但在相反情形则甲乙将有不知应如何选择策略始为适当之感。

为了解除这一困难，E. Borel 与 Von Neumann 引进了“混合策略”的概念，而进行如下考虑：

先就甲方来说，甲方可以不简单地从可能策略 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 中选取其一，而可以概率 $x_1$ 选取 $\xi_1, \cdots$，概率 $x_n$ 选取 $\xi_n$，此处 $x_i \geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$。例如当同一博奕进行无数次时，$x_1, \cdots, x_n$ 各可视为选取策略 $\xi_1, \cdots \xi_n$ 的频率，如果只就一次博奕而言，则 $x_1, \cdots, x_n$ 可表示甲对各该策略的偏爱或重视程度。

同样，乙方也可以概率 $y_1$ 选取 $\eta_1, \cdots$，概率 $y_m$ 选取 $\eta_m$，此处 $y_j \geqslant 0$，$\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$。

我们将称概率分布 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为甲的一个混合策略，概率分布 $(y_1, \cdots, y_m)$ 为乙的一个混合策略，甲方一切可能的混合策略所成集合将记为 $s_{甲}$，同样有 $s_{乙}$。

于是问题成为：

甲乙应取何种混合策略，对甲乙说来都认为最好？

与前进行同样考虑如下：

设甲选取混合策略 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，乙选取混合策略 $y=(y_1, \cdots, y_m)$，则乙应付与甲的数学期望显然应为

$$E(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j。$$

今就甲方来说，设甲先取混合策略 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，乙必将先取一混合策略使乙付与甲的值（指数学期望）为最小，因之甲在此时只能希望获得 $\operatorname*{Min}_{y\in S_{乙}} E(x,y)$，因之，就甲方而言，他应选取这样的一个混合策略 $x$，使相应的 $\operatorname*{Min}_{y\in S_{乙}} E(x,y)$ 有最大值，这时他所能从乙方取得的值为

$$\operatorname*{Max}_{x\in S_{甲}} \operatorname*{Min}_{y\in S_{乙}} E(x,y)=V_{甲}。$$

满足

$$\operatorname*{Min}_{y\in S_{乙}} E(x,y)=V_{甲}$$

的混合策略 $x\in s_{甲}$将称为甲方的**最好策略**。

同样，就乙方来说，他所期望能付与甲的最小值为：

$$\operatorname*{Min}_{y\in S_{乙}}, \operatorname*{Max}_{x\in S_{甲}} E(x,y)=V_{乙},$$

满足

$$\operatorname*{Max}_{x\in S_{甲}} E(x,y)=V_{乙}$$

的混合策略 $y\in s_{乙}$将称为乙方的**最好策略**。

与前同样应有

$$\operatorname*{Max}_{x\in S_{甲}} \operatorname*{Min}_{y\in S_{乙}} E(x,y)\leqslant \operatorname*{Min}_{y\in S_{乙}} \operatorname*{Max}_{x\in S_{甲}} E(x,y),$$

即

$$V_{甲}\leqslant V_{乙}。$$

在 $V_{甲}=V_{乙}$时，甲乙各可选择“最好”策略以进行博奕，若 $V_{甲}<V_{乙}$则否。

与前不同，在此时可证明恒有

$$V_{甲}=V_{乙}。$$

此即 Von Neumann 关于〈零和〉二人博奕的基本定理，今详细叙述此定理如下：

基本定理　设甲有 $n$ 种策略可取：$\xi_1,\cdots,\xi_n$。乙有 $m$ 种策略可取：$\eta_1,\cdots,\eta_m$。在甲取策略 $\xi_i$。乙取策略 $\eta_j$ 时，乙应付与甲 $a_{ij}$；在甲取混合策略 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，乙取混合策略 $y=(y_1,$

$\cdots, y_m$)(此处 $x_i \geqslant 0, \sum x_i = 1, y_i \geqslant 0, \Sigma y_j = 1$ 或 $x \in s_{甲}, y \in s_{乙}$)时，乙应付与甲的数学期望为

$$E(x,y) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_{ij} x_i y_j, \tag{1}$$

则有

$$\operatorname*{Max}_{x \in S_{甲}} \operatorname*{Min}_{y \in S_{乙}} E(x,y) = \operatorname*{Min}_{y \in S_{乙}} \operatorname*{Max}_{x \in S_{甲}} E(x,y)。 \tag{2}$$

注 这定理中甲乙开始时所能取的策略 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 与 $\eta_1, \cdots \eta_m$ 各称为甲与乙的纯正策略。

这一定理是博奕论的基石，定理首先为 E. Borel 所提出，混合策略的概念也是 E. Borel 所首先引入的。但 Borel 只能证明一些简单的特例。完全的证明首先为 J.von Neumann 所得，发表于 1928 年的 Mathematische Annalen 中，博奕论的诞生，可以说由这一篇短文开始。Von Neumann 并先后提供了四个方法各不相同的证明：

第一证明发表于 1928 年，依据实变函数论的一些简单知识。

第二证明发表于 1937 年，依据拓扑学中的 Bronwer 的定点定理。

第三证明发表于 1947 年，应用凸体理论的一些基本知识。

第四证明发表于 1950 年，应用了常微分方程。

其中第三证明最为简短与初浅，其前身是 J. Ville 应用凸体理论的一个初等证明（1938 年），其它三个证明都不能算是初等的。尤其是第一证明，所依据的虽只是实变函数论中一些最简单的概念：函数的连续性与半连续性，但推理颇为繁复，叙述冗长。虽然如此，第二证明系从第一证明演变而来，其次，

第一证明的思路比较清楚，证明方法，也可以说是很自然的，与其它几个证明之尽管简短，巧妙，但颇为突兀者不同。最后，第一证明所证者实际上较上述基本定理所包含者为广，而这个内容较广的定理在有一些博奕论在经济上的应用中也是要用到的。因此下面将对这第一证明参照第二证明作一轮廓介绍，有些略去的论证补进去也并不困难，读者可自为之。

我们把欧氏空间中的一个点集叫做凸的，如果对集中任意两点，连结它们的线段也全在这一点集里面。例如圆的内部与边界所成的点集，一个三角形或四面体的内部与边界所成的点集都是凸集。假设 $x$ 是一个 $n$ 维欧氏空间 $R_n$ 中的一个凸集，$Y$ 是一个 $m$ 维欧氏空间 $R_m$ 中的一个凸集，$f(x,y)$ 是定义在 $X\times Y$ 上的一个函数，即对每一 $x\in X$ 与 $y\in Y$，有一值 $f(x,y)$ 与之对应。我们说 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上的一个 $K$－函数，如果对任意 $y\in Y$ 与任一实数 $a$，满足 $f(x,y)\geqslant a$ 的 $X$ 中一切点 $x$ 成一凸集，又对任意 $x\in X$ 与任一实数 $a$，满足 $f(x,y)\leqslant e$ 的 $Y$ 中一切点 $y$ 也成一凸集。容易看出，如果 $R_n$ 的坐标系统是 $(x_1,\cdots,x_n)$，$Y$ 中的坐标系统是 $(y_1,\cdots,y_m)$，那么 $X\times Y$ 上任一对 $x_1,\cdots,x_n$，而言是线性，又对 $(y_1,\cdots,y_m)$ 而言也是线性的所谓双线性函数 $f(x,y)$，必是 $\bar{X}\times\bar{Y}$ 上的一个连续的 $K$－函数。于是 Von Neumann 所证明的内容较广的定理可述如下。

定理 如果 $X$，$Y$ 各表欧氏空间 $R_n$ 与 $R_m$ 中的下述凸体，

$$\left.\begin{array}{l} X:\ x_1\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,\ \ x_1+\cdots+x_n=1, \\ Y:\ y_1\geqslant 0,\cdots,y_m\geqslant 0,\ \ y_1+\cdots+y_m=1_{\circ} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

其中 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,\cdots,y_m)$ 各是 $R_n$ 与 $R_m$ 中的坐标；又 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上的任意连续 $K$－函数，则必有

$$\operatorname*{Max}_{x\in X}\ \operatorname*{Min}_{y\in Y}\ f(x,y)=\operatorname*{Min}_{y\in Y}\ \operatorname*{Max}_{x\in X}\ f(x,y)。\tag{4}$$

特别设 $f(x,y)$ 为 $X\times Y$ 上的双线性函数 $E(x,y)=\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_i y_j$，即得博奕论的基本定理。

Von Neumann 的证明主要分成两步，先证明 $n=m=2$ 时的特殊情形，这相当于博奕中甲乙双方都只有两个纯正策略可取的情形，其次再把一般的情形归结到这个特殊情形。

先考虑 $n=m=2$ 的特殊情形。这时 $X$ 由 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2=1$ 所定。因此置 $x_1=\xi$ 时，$X$ 实际上相当于一个线段 $0\leqslant\xi\leqslant 1$。同样置 $y_1=\eta$，则 $Y$ 相当于线段 $0\leqslant\eta\leqslant 1$，而 $X\times Y$ 上的连续 $K$-函数 $f(x,y)$，也就成为正方形 $A$：$0\leqslant\xi\leqslant 1$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$ 上的一个连续 $K$-函数 $g(\xi,\eta)$。由于函数 $g$ 的连续性，对于每一个 $\xi$，$0\leqslant\xi\leqslant 1$，使 $g(\xi,\eta)=\operatorname*{Min}\limits_{0\leqslant\bar\eta\leqslant 1}g(\xi,\bar\eta)$ 的值 $\eta$ 必然存在，命这些 $\eta$ 所成的点集为 $K_\xi$。又命 $U$ 是正方形 $A$ 中一切点 $(\xi,\eta)$ 所成的点集，这里 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，而 $\eta\in K_\xi$。同样对任意 $\eta$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$，命满足 $g(\xi,\eta)=\operatorname*{Max}\limits_{0\leqslant\bar\xi\leqslant 1}g(\bar\xi,\eta)$ 的一切值 $\xi$ 的点集为 $L_\eta$（这样的 $\xi$ 必存在）。又命 $V$ 是正方形 $A$ 中一切点 $(\xi,\eta)$ 所成的点集，这里 $0\leqslant\eta\leqslant 1$，而 $\xi\in L_\eta$。由于 $g$ 是连续的 $K$-函数，可以证明 $K_\xi$，$L_\eta$ 都是闭线段（也可以缩成一点）。又 $U$ 与 $V$ 都是“闭”点集，即 $U$ 与 $V$ 各含有它的一切极限点。

从直觉可以推测 $U$ 与 $V$ 应有公共交点（见附图），事实上确实上确是如此。这一点可以直接从拓扑中的 Bronwer 定点定理导出，也可以根据实变函数论的一些简单事实来予以证明。在下面将应用 Bronwer 定理来证明它。

我们所要用到的 Bronwer 定点定理事实上只是这个定理的下述特殊情形：假设 $h$ 是把一个正方形映到它自身的一个连

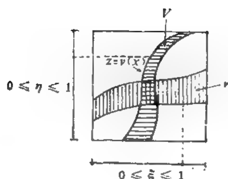



图 1

续映象，换言之，对于正方形的每一点 $z$，有正方形中的一点 $h(z)$ 与之对应，而在点 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 收敛于一点 $z$ 时，$h(z_1)$，$h(z_2)$，$\cdots$，$h(z_n)$，$\cdots$ 也收敛于 $h(z)$。在这样的假定之下，$h$ 必然有一个"定点"，即在正方形中有一点 $z_0$，使 $h(z_0)=z_0$。

现在来证明 $U$ 与 $V$ 必有公共交点如下。显然在正方形 $A$ 中但不在 $U$ 中的点构成两个不相交开集 $U_0$ 与 $U_1$ 的和集，此处 $U_0$ 不含有边 $\eta=1$ 上的点，$U_1$ 不含有 $\eta=0$ 上的点。同样在正方形 $A$ 中但不在 $V$ 中的点也构成两个不相交开集 $V_0$ 与 $V_1$ 的和集，此处 $V_0$ 不含边 $\xi=1$ 上的点，$V_1$ 不含边 $\xi=0$ 上的点。这里的 $U_0$，$U_1$，$V_0$，$V_1$ 也可能是空集，但对我们的论证无关紧要。对于 $A$ 中的任一点 $z$，命 $d(z,U)$ 与 $d(z,V)$ 各表 $z$ 至点集 $U$ 与 $V$ 的距离，即 $d(z,U)$［或 $d(z,V)$］是 $z$ 至 $U$（或 $V$）中各点的距离的下确界。由于 $U$ 是闭集，$d(z,U)$ 同时也是 $z$ 至 $U$ 中各点的距离的最小值。当 $z\in U$ 时，$d(z,U)=0$，当 $z$ 不 $\in U$ 时，$d(z,U)>0$。对 $d(z,V)$ 来说也同样。今对正方形 $A$ 中每一点 $z$ 作一起点在 $z$ 的一个矢量 $v(z)$，使它沿 $\xi$ 与 $\eta$ 方向的分量各为 $\pm d(z,U)$ 与 $\pm d(z,V)$，这里 $\pm$ 号的取舍如下：当

$z$ 在 $U_0$(或 $V_0$)中时，$d(z,U)$(或 $d(z,V)$)前取 + 号，当 $z$ 在 $U_1$(或 $V_1$)中时，$d(z,U)$(或 $d(z,V)$)前取 − 号。命矢量 $v(z)$ 的端点为 $h(z)$，则由关于 $K_\xi$，$L_\eta$ 与 $U,V$ 的已知性质，不难知 $h(z)$ 也在正方形 A 中。且 $h$ 是一个连续映象。由前述 Bronwer 定理，在 A 中必有一点 $z^*$ 使 $h(z^*)=z^*$，也就 $v(z^*)=0$，或 $d(z^*,U)=d(z^*,V)=0$。因之 $z^*\in U$ 也 $\in V$，或 $U,V$ 有公共交点 $z^*$。

记这一共公交点 $z^*$ 为 $(\xi^*,\eta^*)$，则按 $U$ 与 $V$ 的定义有 $g(\xi^*,\eta^*)=\underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\, g(\xi^*,\eta)$，$g(\xi^*,\eta^*)=\underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\, g(\xi,\eta^*)$。由此得

$$\underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\ \underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\ g(\xi,\eta)\geqslant\underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\ g(\xi^*,\eta)$$

$$=g(\xi^*,\eta^*)=\underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\ g(\xi,\eta^*)$$

$$\geqslant\underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\ \underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\ g(\xi,\eta)。$$

另一方面易知有

$$\underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\ \underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\ g(\xi,\eta)\leqslant\underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\ \underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\ g(\xi,\eta)。$$

合之得

$$\underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\ \underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\ g(\xi,\eta)=\underset{0\le\eta\le1}{\mathrm{Min}}\ \underset{0\le\xi\le1}{\mathrm{Max}}\ g(\xi,\eta)。$$

这也就是前面的(4)式。这证明了 $n=m=2$ 时的情形。

在一般情形，由(3)式可将 $x_n=1-x_1-\cdots-x_{n-1}$ 与 $y_n=1-y_1-\cdots-y_{n-1}$ 代入 $f(x,y)$ 得一函数 $g(\bar{x},y)$，这里的 $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 与 $\bar{y}=(y_1,\cdots,y_{n-1})$ 各展开与区域

$\bar{X}$：$x_1\geqslant0,\cdots,x_{n-1}\geqslant0$，$x_1+\cdots+x_{n-1}\leqslant1$，与 $\bar{Y}$：$y_1\geqslant0,\cdots,y_{n-1}\geqslant0$，$y_1+\cdots+y_{n-1}\leqslant1$ 之上，所要证明的(4)式就变成

$$\underset{\bar{x}\in\bar{X}}{\mathrm{Max}}\ \underset{\bar{y}\in\bar{Y}}{\mathrm{Min}}\ g(\bar{x},\bar{y})=\underset{\bar{y}\in\bar{Y}}{\mathrm{Min}}\ \underset{\bar{x}\in\bar{X}}{\mathrm{Max}}\ g(\bar{x},\bar{y}),\tag{5}$$

其中 $g$ 也是 $\bar{X}\times\bar{Y}$ 上的一个连续 K-函数。

在(5)式中求最大值与最小值的符号$\underset{\bar{x}\in\bar{X}}{\text{Max}}$与$\underset{\bar{y}\in\bar{Y}}{\text{Min}}$可以看做一个所谓运算子,其作用是把一个函数变成另一个函数,只是函数的变数减少了，就象偏微分$\frac{\partial}{\partial x}$或积分$\int_a^b \cdots dx$之类记号的作用一样。显然，在求$\bar{x}\in\bar{X}$函数的最大值时，可依次对$x_{n-1}$，$x_{n-2}$，…，$x_1$求最大值，换言之运算子$\underset{\bar{x}\in\bar{X}}{\text{Max}}$可以分解成若干个运算子的"积"。

$$\underset{\bar{x}\in\bar{X}}{\text{Max}} = \text{Max}_{x_1}\text{Max}_{x_2}\cdots\text{Max}_{x_{n-1}},$$

同样有

$$\underset{\bar{y}\in\bar{Y}}{\text{Min}} = \text{Min}_{y_1}\text{Min}_{y_2}\cdots\text{Min}_{y_{n-1}}。$$

容易证明把$\text{Max}_{x_j}$或$\text{Min}_{y_j}$作用在一个连续$K$-函数上，所得的也是一个连续$K$-函数,虽然所得的函数的变数已减少且定义域也已改变。根据已证明的特殊情形，作用于这函数上应有

$$\text{Max}_{x_i}\text{Min}_{y_j} = \text{Min}_{y_j}\text{Max}_{x_i}。$$

(作用在一般的函数上时，这个式子是不对的)

在$\underset{\bar{x}\in\bar{X}}{\text{Max}}\underset{\bar{y}\in\bar{Y}}{\text{Min}}\, g(\bar{x},\bar{y}) = \text{Max}_{x_1}\cdots\text{Max}_{x_{n-1}}\text{Min}_{y_1}$ $\text{Min}_{y_2}\cdots\text{Min}_{y_{n-1}}g(\bar{x},\bar{y})$中，我们可将中间两运算子$\text{Max}_{x_{n-1}}$，$\text{Min}_{y_1}$交换(看做作用在函数$\text{Min}_{y_2}\cdots\text{Min}_{y_{n-1}}g(\bar{x},y)$上)，其次交换$\text{Max}_{x_{n-1}}$与$\text{Min}_{y_2}$，等等，最后得

$\text{Min}_{y_1}\cdots\text{Min}_{y_{n-1}}\text{Max}_{x_1}\cdots\text{Max}_{x_{n-1}}g(\bar{x},\bar{y})$。因之得(5)式，也就是(4)式。

至此定理已完全证明。

有了上面这一条定理,我就可以引入这样一些概念：

(2) 式左右两边的公共值$v$，我们叫做博奕的"值"。

矩阵$(a_{ij})$叫做博奕的"支付函数"。

使$\underset{y\in s乙}{\mathrm{Min}}\ E(x^*,y)=v$的$x^*\in s_{甲}$叫做甲的"最好策略"，

使$\underset{x\in 甲}{\mathrm{Max}}\ E(x,y^*)=v$的$y^*\in s_{乙}$叫做乙的"最好策略"。

象前面所分析的那样，这里的最好策略的"最好"两字具有下述意义：甲取任一最好策略时，不论乙如何应付，甲可保证至少取得$v$（取得的值是指数学期望而言），若取别的策略，则不能保证取得$v$，同样，乙取任一最好策略时，不论甲如何应付，乙可保证至多付出$v$，若取别的策略，则不能保证只付出$v$。因此，这里的所谓最好策略，确实是当得起"最好"两字之称的。

在一个具体的博奕问题中，我们可以根据上述定理定出甲乙双方的最好策略来。

对前面所举扑克牌打赌的例来说，答案是相当繁复的。大体上说来，如果拿的牌相当好，就应该出大注，如果拿的牌不够好，就应按照一定的概率比例不规则地时而出大注，时而出小注，在出小注而遇见对方出大注时，就应立刻认输而从来不应要求摊牌。究竟好到什么程度才出大注，在不够好时出大注与小注的概率比例如何，都可以精确地计算出来。

在下棋例中，象象棋围棋，各人下子时对于两人过去所下的过程都是彼此清楚的，对这一类的棋，Zermelo 与 Von Neumann 曾经证明，两人都有确定的纯正策略为其最好策略。换句话说，未下之先，两人的胜负事实上早就已经判明了。虽然如此，爱下棋的同志并不必为此扫兴，因为为下棋的(纯正)策略有恒河沙数，Zermelo-Von Neumann 定理所证的只是在这恒河沙数的策略中每人有最好的策略存在，但要从恒河沙数的策略中真正的把它找出来，即使是最好的国手也是没法做到

的。

对于军队在三个战场上作战的例子来说，可以证明，把全部援军开赴同一个战场，或者把援军平均分配与三个战场，都是拙劣的战略，应该予以摒弃。最值得考虑的战略是把全部兵力开赴两个战场，其分配是10个团与5个团，或9个团，与6个团，或8个团，与7个团，至于11个团与4个团的分配就是一个拙劣的战略了。其次值得考虑的战略是依下面的比例开赴三个战场：(9,5,1)，(8,6,1)，(7,7,1)，也还有一些战略备考。对于各个不同战略考虑的程度，可以用概率具体表达出来。

在这里，请原谅作者忍不住要顺便提一下我国历史上一个著名的故事。在战国时，齐国的国王与齐国的大夫田忌赛马，齐王有三匹好马，上马中马下马。田忌也有三匹好马，上马中马下马。比赛分三次进行，每赛以千金作赌。齐王的马匹都各各比田忌的好，虽然马力相差不多。看来田忌是输定了，可是田忌的门客孙膑(大家知道，这是中国历史上出色的大战略家，是传说孙子兵法的作者)给田忌出了一个主意：以下马对齐王的上马，而以上马对齐王的中马，中马对齐王的下马。结果田忌净胜千金。以这例与援军分配的例相较，虽然繁简有别，不同之处甚多，但，也有不少地方是类似的，就策略上来说，两者都应放弃一处，而争取在其它两处获胜。如果在赛马中只需要一些常识上的推敲，那么在援军分配问题中就不能不借助数学来作出精确地判断了。

我们也可以应用博奕原理论来考虑诸如此类的许多问题：飞机对军舰的追逐，坦克的作战，等等。自然我们只能考虑简之又简的情况，要说真正能对实际问题发挥效果，而起指导作用，很可能还遥远得很，甚至还渺茫得很，只能寄希望于未

来。但如果我们想到十七八世纪时代的概率论是怎样一个面目，而现代的概率论又怎样广泛地被应用于自然科学，工程技术，国民经济甚至日常生活之中，又如果我们想到博奕论所从事的对立现象正与概率论所从事的随机现象同样普遍地存在于现实世界，那么博奕论在将来的获得广泛应用，就不是一种想入非非的猜测了。事实上博奕论的历史只有三十来年（从 Von Neumann 1928年的工作算起），可是已经出现了不少应用，特别值得一提的是与线性规划的联系以及在统计判决理论上的应用。Von Neumann 本人还曾应用之于工作的分配问题，生产系统按比例发展问题，与工厂建址问题，还以博奕论为基础发展了描述经济现象与社会现象的一个数学理论。虽然这些应用的深度与广度值得讨论，有的应用（特别在经济学上的应用）在观点上是根本有问题的，但已有的成果已足以鼓舞人们去作进一步的开拓。如果与概率作一比较，在十七八世纪的概率论仅能考虑一些类似排列组合的简单问题，直到十九世纪下半世纪才证明了大数定律并被成功地应用于气体分子理论与热力学，至于概率论基础的奠定，与随机过程理论的发展，还是近三十年来的事，中间经历的路程是漫长而曲折的，因此才有三十年历史的博奕论，内容不多就不足怪了。但是大风起于微末，谁又能武断目前还是微末的博奕论，不在将来蔚为大风呢？

# 数 学 机 械 化

# 数学的机械化

十六、七世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代。几百年后的今天，正如敬爱的周总理早在1956年就指出的那样，电子计算机已可开始有条件地代替一部分特定的脑力劳动，因而人类已面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕。数学是一种典型的脑力劳动，它在这一场新的技术革命中，无疑将扮演一个重要的角色。为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色，就应对机器的作用，以及作为数学的脑力劳动的方式，进行一定的分析。

## 一、什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需代替的劳动已经“机械化”，也就是说已实现了刻板化或规格化。正因为割麦、刈草、纺纱织布的动作已经是机械化刻板化了的，因而可据以造出割麦机、刈草机、纺纱机织布机来。也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动，几千年来就已经是机械地刻板地进行的，才有可能使得十七世纪的法国数学家巴斯喀，利用齿轮传动造出了第一台机械计算机——加法机，并由莱布尼茨改进成为也能进行乘法的机器。数学问题的机械化，就要求在运算或证明

过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论。

在中小学数学的范围里，就有着不少已经机械化了的课题。除了四则、开方等运算外，解线性联立方程组就是一个很好的例子。在新编高中数学课本中，介绍了现代数学鼻祖高斯（德国人，1777～1855）解线性方程组的一种“消去法”，其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程，也就是一种机械的、刻板的过程。根据这一过程编成程序，由电子计算机付诸实施，就可以不仅机器化而且达到自动化，在几分钟内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来，这在手工计算自然是不可能的。如果用手工计算，即使是解只有三、四个未知数的方程组，也将是繁琐而令人厌烦的。现代化的国防、经济建设中，大量出现的例如网络一类的问题，往往可归结为求解很多未知数的线性方程组。这使得已经机械化了的线性方程解法在四个现代化中起着一种重要作用。

即使是不专门研究数学的人们，也大都知道，数学的脑力劳动有两种主要形式：数值计算与定理证明（或许还应包括公式推导，但这终究是次要的）。著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇《向机械化数学前进》的有名文章中，曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点。我们可以简略而概括地把它们对比一下：

| 计 算 | 证 明 |
|---|---|
| 易 | 难 |
| 繁 | 简 |
| 刻板 | 灵活 |
| 枯燥 | 美妙 |

计算，如已经提到过的加减乘除开方与解线性方程组，其所以虽繁而易，根本原因正在于它已经机械化。而证明的巧而难，是大家都深有体会的，其根本原因也正在于它并没有机械化。例如，我们在中学初等几何定理的证明中，就经常要依靠诸如直观、洞察、经验，以及其他一些模糊不清的原则，去寻找捷径。

## 二、从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是：定理的证明是不是也能象计算那样机械化，因而把巧而难的证明，化为计算那样虽繁而易的劳动呢？事实上，这一证明机械化的设想，并不始自今日，它早就为十七世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家莱布尼茨所具有。只是直到十九世纪末，希尔伯特（德国数学家，1862～1943）等创立并发展了数理逻辑以来，这一设想才有了明确的数学形式。又由于四十年代电子计算机的出现，才使这一设想的实现有了现实可能性。

从本世纪二、三十年代以来，数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性，进行了大量的理论探讨，他们的结果大都是否定的。例如哥德尔（Godel）等人的一条著名定理就说，即使看来最简单的初等数论这一范围，它的定理证明的机械化也是不可能的。另一面，1950 年波兰数学家泰斯基（Tarski）则证明了初等几何（以及初等代数）这一范围的定理证明，却是可以机械化的。只是泰斯基的结果近于例外，在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的，即机械化是不可能的。

1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝

试。1959年王浩先生设计了一个机械化方法，用计算机证明了罗素等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理，只用了9分钟，在数学与数理逻辑学界引起了轰动。有一时机器证明的前景似乎非常乐观。例如1958年时就有人曾经预测：在10年之内计算机将发现并证明一个重要的数学新定理。还有人认为，如果这样，则不仅许多著名哲学家与数学家如庞阿诺、怀特海、罗素、希尔伯特以及杜灵等人的梦想得以实现，而且计算将成为科学的皇后，人类的主人！

然而，事情的发展却并不如预期那样美好。尽管在1976年时，美国的哈肯等人，在高速计算机上用了1,200小时的计算时间，解决了数学家们100多年来所未能解决的一个著名难题——四色问题*，因此而轰动一时，但是，这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力，还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明。用王浩先生的说法，哈肯等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证，它只适用于四色这一特殊的定理，这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别。后者才真正体现了机械化定理证明，进而实现机器证明的实质。另一面，在真正的机械化证明方面，虽然塔斯基在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的，还提出了据以造判定机也即是证明机的设想，但实际上他们的机械化方法非常繁，繁到不可收拾，因而远远不是切实可行的。1976年时，美国做了许多在计算机上证明定理的实验，在塔斯基的初等几何范围内，用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的

* 1852年英国人格斯里克(Guthric)提出的猜测："就地图着色而言，四色是足够的。也就是说，对于任何一幅地图着色，只需四种颜色，就足以使得所有相邻地区的颜色不致重复。

“儿戏式”的“定理”。因此，有些专家曾经发出过这样悲观的论调：如果专依靠机器，则再过100年也未必能证明出多少有意义的新定理来。

## 三、一条切实可行的道路

1976年冬，正值四人帮垮台之际，我们开始了定理证明机械化的研究。1977年春取得了初步成果，证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化。在理论上说来，我们的结果已包括在泰斯基的定理之中。但与泰斯基的结果不同，我们的机械化方法是切实可行的，即使用手算，也可以证明一些艰深的定理。

我们的方法主要分两步，第一步是引进座标，然后把需证定理中的假设与终结部分都用座标间的代数关系来表示。我们所考虑的定理局限于这些代数关系都是多项式等式关系的范围，例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此。这一步可以叫做几何的代数化。第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的座标逐个消去，如果消去的结果为零，即表明定理正确，否则再作进一步检查。这一步完全是代数的，即用多项式的消元法来验证。

上述两步都可以机械与刻板地进行。根据我们的机械化方法编成程序，以在计算机上实现机器证明，并无实质上的困难。事实上数学所某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过。我们自己也曾在国产的长城203台式机上证明了像西姆森线*那样不算简单的定理。1978年初，我们又证明了初

* 从圆周上任一点向圆内接三角形的三条边做垂线，三垂足必在一条直线上，这条直线叫西姆森线，这条定理叫西姆森定理。

等微分几何中主要的一类定理证明也可以机械化。而且这种机械化方法也是切实可行的，并据此用手算证明了不算简单的一些定理。

从我们的工作中可以看出，定理的机械化证明，往往极度繁复，与通常既简且妙的证明形成对照，这种以量的复杂来换取质的困难，正是利用计算机所需要的。

在电子计算机如此发展的今天，把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难，而且有一台微型的台式机也就够了。就像我们曾经使用过的长城 203，它的存数最多只能到 234 个 10 进位的 12 位数，就已能用以证明西姆逊线那样的定理。目前内存简单的所谓个人用微型机，已到 32K 以至 64K 字节。稍高级的已到 256K 以至 400 多 K 字节，而且随着超大规模集成电路与其它技术的出现与改进，微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大，功能愈来愈多，自动化的程度也愈来愈高。用不着到二十世纪末，这一类方便的小型机器就可为广大群众普遍使用。它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器，而且还可用以发现并证明一些艰深的定理，而这种定理的发现与证明，在数学研究手工业式的过去，将是不可想象的。

应该指出，目前我们所能证明的定理，局限于已经发现的机械化方法的范围，例如初等几何与初等微分几何之内。而如何超出与扩大这些机械化的范围，则是今后需要探索的长期的理论性工作。

## 四、历史的启示与未来的技术革命

作为结束，我们提出几点看法。

首先，成功的机械化方法并非始自这几年。约在一年以前，我们发现早在1899年出版的希尔伯特的经典名著《几何基础》中，就有着一条真正的正面的机械化定理：初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化。当然，原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的，也许就连希尔伯特本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识，自然更不见得有其他人提到过这一定理的机械化内容。希尔伯特这一名著是以公理化的典范而著称于世的，但我认为，该书更重要之处，是在于提供了一条从公理化出发，通过代数化以到达机械化的道路。自然，处于希尔伯特以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里，公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展，而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的。但在电子计算机已日益普及，因而繁琐而重复的大量计算已成为不足道的现代，机械化的思想应比公理化思想受到更大重视，似乎是合乎实际的。

其次应该着重指出，我们从事机械化定理证明工作获得成果之前，对泰斯基的已有工作并无接触，更没有想到希尔伯特的《几何基础》会与机械化有任何关系。我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的。

说起来道理也很简单：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学。四则运算与开方的机械化算法由来已久。汉初完成的《九章算术》中，对开平立方的机械化过程，就有详细说明，到宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法。在《九章算术》中还有着各种线性联立方程组的问题与解法以及正负数的概念，在魏晋时刘徽的《九章算术》注中，说明了几种机械的消去法及其详细的机械化算法过程。把刘注的说明列成图

表，即与前面所提到的中学课本中所列高斯消去法的那些图表无异，宋代秦九韶《数书九章》中，更有着颇为繁复的算题与详细图表。沈康身同志所著的《中国数学史略》，在这方面做了详细介绍。

在宋元时代，我国就创立了“天元术”，引进了天元，以及天元、地元、人元、物元等相当于现代未知数的概念，把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题。这一方法用于几何可称为几何的代数化。十二世纪的刘益将新法与“古法”比较，称“省功数倍”。与之相伴而生，又引进了相当于现代多项式的概念，建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具，使几何代数化的方法得到了有系统的发展，具见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中。几何的代数化是解析几何的前身，这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰。可以说，当时我国已到达了解析几何与微积分的大门，具备了创立这些数学关键领域的条件，但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来。几百年的停顿，使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家。然而，我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的。作者本人关于数学机械化的研究工作，就是在这些思想与成就启发之下的产物，它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承。

恩格斯曾经指出，枪炮的出现消除了体力上的差别，使中世纪的骑士阶级从此消声匿迹，为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件。近年有些计算机科学家指出，个人用计算机的出现，其冲击作用可与枪炮的出现相比。枪炮使人们在体力上难分强弱，而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明

愚鲁。又有人对数学的未来提出看法，认为计算机的出现，将使数学现在一张纸一支笔的方法，在历史的长河中，无异于石器时代的工业方法。今天的数学家们，不得不面对计算机的挑战，但是，也不必妄自菲薄。大量繁复的事情交给计算机去做了，人脑将仍然从事富有创造性的劳动。

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队，以致造成现在的落后状态。在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中，我们不能重蹈覆辙。数学是一种典型的脑力劳动，它的机械化有着许多其它类型脑力劳动所不及的有利条件。周总理的遗愿，我国古代数学的光辉，都鼓舞着我们为实现数学的机械化，在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前。

# 几何定理的机器证明

用机械方法证明定理的思想，可以远溯至十七世纪的莱布尼兹，在本世纪内，已经由希尔伯特的数理逻辑学派和他的学生们用精确的数学形式表述出来。这问题的实质在于：把通常数学证明中所固有的质的困难性，代之以用算法方式使证明过程标准化而造成的计算中的量的复杂性。这种属于计算的量的复杂性过去是人力所不可及的，而现在由于计算机的产生和迅速发展，已经变得越来越微不足道了。但是，虽然经过了巨大的努力，这方面的研究却时常得到否定的结果，即形成不可判定的数学理论，要举一个著名的肯定的结果，我们可以提到塔尔斯基（Tarski）用机械方法证明初等几何和初等代数中的定理的方法。塔尔斯基的方法以及后来的一些方法在很大程度上是以斯图谟定理的推广为根据的，这些方法仍旧太复杂，即使用计算机也实现不了。关于在美国用计算机所作实验及所得结果。可参阅 IEEE's Trans. on Computers，1976，机器证明定理专辑中的一些论文。

1977 年，作者发现了一种方法，它所根据的原理与塔尔斯基等人所用的完全不同，用了这种方法，可以用机械方式给出很难的几何定理的证明。后来这方法又被扩充到初等微分几何，我们用不同的计算机编了程序，作了试验，本文是关于我们所用方法和迄今为止用计算机所作试验的初步报告。

现在从初等几何讲起。为举例起见，我们来考察费尔巴赫

(Feuerbach) 定理，这定理可叙述如下：

三角形的九点圆与它的 4 个内切和旁切圆相切。

取给定三角形的 3 个顶点为 $(2u_i, 2u_{i+3})$，$i=1$，2，3，九点圆的圆心和半径为 $(x_4, x_5)$ 和$x_8$，内切圆或任一旁切圆的圆心和半径为 $(x_6, x_7)$ 和$x_9$。设 $2x_1$，$2x_2$，$2x_3$ 分别对应于三角形的 3 条边的长度，其值或正或负，依照所证情形是内切圆或旁切圆而定。

为简单起见，设*

$$u_{ij}=u_i-u_j,\quad i,j=1,\cdots,6,$$

$$2\Delta=\begin{vmatrix} u_1 & u_4 & 1 \\ u_2 & u_5 & 1 \\ u_3 & u_6 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_1=u_{56}u_{64}u_{45}+u_1^2u_{56}+u_2^2u_{64}+u_3^2u_{45}-2(u_2u_3u_{56}$$
$$+u_3u_1u_{64}+u_1u_2u_{45}),$$

$$\beta_1=-u_{23}u_{31}u_{12}-u_4^2u_{23}-u_5^2u_{31}-u_6^2u_{12}+2(u_5u_6u_{23}$$
$$+u_6u_4u_{31}+u_4u_5u_{12}),$$

$$\alpha_2=[u_{56}u_{64}u_{45}+u_4(u_2^2-u_3^2)+u_5(u_3^2-u_1^2)$$
$$+u_6(u_1^2-u_2^2)]+u_{56}x_2x_3+u_{64}x_3x_1+u_{45}x_1x_2,$$

$$\beta_2=u_{23}u_{31}u_{12}+u_1(u_5^2-u_6^2)+u_2(u_6^2-u_4^2)$$
$$+u_2(u_4^2-u_5^2)+u_{23}x_2x_3+u_{31}x_3x_1+u_{12}x_1x_2,$$

---

* 下面的数据并不是用机械自动的手续得来而是经过某些推理论证以及一些简化得来，因而从机器证明的角度来说并不完全合适。这是由于当时使用的计算机过小，自动化程度过低，作者对计算机又是初次使用，为了使计算量不致超出所用计算机的范围，采取了这样的办法。事实上，现在已可编成程序自动地把几何命题中的几何条件变成代数数据。这样费尔巴赫定理的机器证明从几何假设到证明完毕全部可由机器完成，所用数据自然与这里所举的不会一样。

$$\gamma=(u_{31}u_{12}+u_{64}u_{45})x_1+(u_{12}u_{23}+u_{45}u_{56})x_2$$
$$+(u_{23}u_{31}+u_{56}u_{64})x_3+x_1x_2x_3。$$

于是费尔巴赫定理的假设等价于下列一组关系式$(I)_F$：

$$(I)_F\begin{cases}f_1\equiv x_1^2-u_{23}^2-u_{56}^2=0,\\ f_2\equiv x_2^2-u_{31}^2-u_{64}^2=0,\\ f_3\equiv x_3^2-u_{12}^2-u_{45}^2=0,\\ f_4\equiv 4\Delta x_4-\alpha_1=0,\\ f_5\equiv 4\Delta x_5-\beta_1=0,\\ f_6\equiv 2\Delta x_6-\alpha_2=0,\\ f_7\equiv 2\Delta x_7-\beta_2=0,\\ f_8\equiv 4\Delta x_8-x_1x_2x_3=0,\\ f_9\equiv 2\Delta x_9+\gamma=0。\end{cases}$$

这定理的结论等价于下面的关系式：

$$g\equiv(x_8-x_9)^2-(x_4-x_5)^2-(x_6-x_7)^2=0。$$

最后，这定理的真确性等价于说：当$\Delta\neq0$，即当三角形是非退化的，它的3个顶点不坍塌到位于一直线上时，$g=0$就是$(I)_F$的一个形式推论。

为了对上述定理作出机器证明，我们先指出如下几点：

(1) 变数$u_i$可当作参数，这相当于实际上在所有几何定理中通常不言而喻地假定的事实，即所涉及的三角形是一个**一般的**三角形，从而把$\Delta=0$的退化情形排除在外。

(2) 变数$x_i$为$(I)_F$中具有整系数的代数关系式所约束，并且每次一个地相继呈现。

(3) 方程组$(I)_F$定义了一个有理数（或实数）$K$域上**实**6维的代数簇$V_F$。在这情形中，这个簇是不可约的，它具有超越次数为6的一般点$(u_1,\cdots,u_6,x_1,\cdots,x_9)$，这里$u_i$是未定

元，$x_i$ 是代数的，由方程 $f_i=0$ 定义。

(4) 上述费尔巴赫定理的意义就是说在代数簇 $V_F$ 上 $g=0$。

这个情况是很一般的，上列各点可以应用于初等几何中的大部分定理。

事实上，初等几何中凡是只包含希尔伯特公理系统中的关联公理、迭合公理和平行公理而不包含次序公理和连续公理的大多数定理，都可以表述成下面的形式。

所述定理的假设用下式给出（或易于变换成下式）：

$$\begin{cases} f_1 \equiv C_{10}x_1^{m_1} + C_{11}x_1^{m_1-1} + \cdots + C_{1m_1} = 0, \\ f_2 \equiv C_{20}x_2^{m_2} + C_{21}x_2^{m_2-1} + \cdots + C_{2m_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_N \equiv C_{N0}x_N^{m_N} + C_{N1}x_N^{m_N-1} + \cdots + C_{Nm_N} = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

每一个 $C_{ij}$ 是含有一些未定元或参数 $u_1$，…，$u_d$ 以及变数 $x_1$，…，$x_{i-1}$ $(i=1,\cdots,N)$ 的多项式，具有有理系数或者甚至整系数。需要证明的结论是

$$g=0,$$

其中 $g$ 是含有 $u_i$ 和 $x_j$ 的多项式，具有有理系数或者甚至整系数。

于是这定理等价于说 $g=0$ 是在

$$C_{i0}\neq 0$$

的附加条件下关系式 $(I)$ 的形式推论。这附加条件相当于这样的事实：我们只对非退化或一般情形感兴趣。问题是要设计出一种方法，使我们能用可行的机械方式判断这定理的真伪，所谓可行，就是说我们能用手和笔，或者借助于不太大的电子计算机，在不太长的时间内完成证明的步骤。

我们的方法进行如下：

将 $g$ 依次除以 $f_N$，$f_{N-1}$，$\cdots$，$f_1$，它们依次被当作 $x_N$，$x_{N-1}$，$\cdots$，$x_1$ 的多项式。设最后的余式是 $R$，使我们得到下面这样的恒等式（$s_i \geqslant 0$）：

$$C_{10}^{s_1} \cdots C_{r0}^{s_r} = \sum A_i f_i + R,$$

其中 $A_i$ 和 $R$ 是 $u$ 和 $x$ 的多项式，具有有理（或整）系数，在每一个 $x_i$ 中 $R$ 的次数 $< m_i$。把($I$)当作基域 $K$ 上代数簇 $V$ 的定义方程，于是我们的方法就以下面这容易证明并且几乎是平凡的原理为基础：

**原理** 如果 $V$ 在具有真正的实维 $d$(＝未定元 $u_i$ 的数目)的 $K$ 域中不可约（这具有明显的几何意义），那末作为多项式的 $R \equiv 0$ 是在 $C_{i0} \neq 0$ 的一般情形中定理为真的充要条件。在任何情况下，$R \equiv 0$ 是使一般情形中定理为真的充分条件。

我们应用了上述原理来证明初等几何中的各种定理，我自己用的是 HP9835A 台式计算机，陈东岳用的是 Felix C-512 计算机。

在试验过的定理中可以举出这样一些：勾股定理（即毕达哥拉斯定理），一些三角恒等式，西姆森线（Simson line）定理，派泼斯（Pappus）定理，帕斯卡定理，费尔巴赫定理，等等，特别是对于费尔巴赫定理，陈用 Felix C 计算机以不到 12.5 分的时间完成了证明，所用语言 FCY 是通常用的 LISP 的改进，并且是陈自己研究成功的。

一旦定理的证明变得平凡时，我们就尝试去发现“新”定理，所谓“新”是指通常不知道或文献中不易找到，或者真正是完全新的。于是，按照同样的方式，我们用 HP9835A 台式计算机发现了并证明了两个这样的“新”定理。

为了说明我们发现的第一个“新”定理，让我们考察分别由$A_1$，$A_2$，$A_3$和$B_1$，$B_2$，$B_3$各3点组成的两个点集，它们各自位于同平面内的$L_A$和$L_B$两条线上。设$B$点按任何方式排列，例如$B_i$，$B_j$，$B_k$。根据派泼斯定理，3个交点$A_2B_k \wedge A_3B_j$，$A_3B_i \wedge A_1B_k$和$A_1B_j \wedge A_2B_i$将位于同一条派泼斯线上，我们用$[i,j,k]$来表示。在$B$点的不同排列之下，我们一共得到6条这样的派泼斯线，于是我们可以提出这样的问题：这6条线是否与同一个二次曲线相切？通过粗略地画图，我们看到很可能真是如此，不过二次曲线退化成两点。我们不用通常的方式去证明，因为这不是我们的目的，我们应用上述方法，借助HP9835A计算机。我们终于发现并证明了下述“新”定理：

3条派泼斯线[123]，[231]和[312]是共点的。另外3条派泼斯线[132]，[321]和[213]也是如此。

关于第二个“新”定理，我们考察同一个二次曲线上的6个点$A_1$，…，$A_6$。我们把从它们得到的任何交点$A_iA_j \wedge A_kA_l$（$i$，$j$，$k$，$l$都不相同）叫做帕斯卡点。这些帕斯卡点共有45个，根据帕斯卡定理，将会3个3个地位于总共有60条的所谓帕斯卡线上。于是我们可以提出如下的问题：在45个帕斯卡点中，怎样的6点组合会位于同一个二次曲线上？

为了这目的，让我们考察由6个数字1，2，…，6组成的对称群，以及譬如说由循环$g=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$产生的6阶子群。现在考察任何帕斯卡点$P=A_iA_j \wedge A_kA_l$，我们来看一看，究竟6个帕斯卡点$g^iP$，$i=0$，1，…，5会不会位于同一个二次曲线。经过试验我们看到，除了6点将位于两条帕斯卡线（重合或不重合）的退化二次曲线的平凡情况外，唯一需要考

虑的可能情况是 $P=A_1A_3\wedge A_2A_5$ 或类似的情况。我们仍旧用 HP9835$A$ 发现并证明了如下的"新"定理：

当 $P=A_1A_3\wedge A_2A_5$ 时，6 个帕斯卡点 $g^iP$，$i=0, 1, \cdots, 5$ 将位于同一个二次曲线，叫做帕斯卡二次曲线。对于不同的 $g$ 和不同的 $P$，我们共得到 20 个这样的帕斯卡二次曲线。

60 条帕斯卡线组成了一个很有趣的构形，这种构形曾在十九世纪被一些几何学家象斯泰纳（Steiner），凯莱(Cayley)，萨尔门（Salmon），寇克曼（Kirkmann）等作过很深的研究，例如可参阅萨尔门的 Conic Section 的附录。对于 20 个帕斯卡二次曲线的构形（或 60 条帕斯卡线一起），也可以作同样的研究。

用来发现和证明这两个"新"定理的 HP9835$A$ 计算机是台式计算机，存储量是 256$K$ 个字节，其中实际用到的只有 100$K$ 个字节。它的速度很低，大约每秒 3000 次加法。证明帕斯卡二次曲线定理所用时间是 60 小时不到一点。如果用速度较高的计算机，譬如说陈所用的每秒 370000 次加法的 Felix C 计算机，所需时间可以缩短到 30 分左右。根据所有这些情况，我们认为我们的方法是很有效的，它使我们可以运用小型中速计算机（由于今天的技术发展程度，这是很平常的）去发现和证明比已知定理复杂得多的"新"定理，这些定理用通常的方法也许是完全不可能证明的。

上述方法适当作些改变后也可以用于微分几何。

# 数学的机械化问题

通常所谓的机械化，不论是工业的还是农业的，都是指体力劳动的机械化而言。现在我们提出这样的问题：数学研究这样的脑力劳动，是不是也能机械化？

我个人的理解是：所谓机械化，无非是刻板化和规格化。机械化的动作，由于简单刻板，因而可以让机器来实现，又由于往往需要反复千百万次，超出了人力的可能，因而又不能不让机器来实现。因之，机械化为机器化进而自动化铺平道路，是它们必不可少的前奏。就这一意义来说，数学中的某些脑力劳动与体力劳动颇有共同之点，它们也就同样可以机械化。事实上，我们在中小学的课程里，就已学习了不少机械化的数学内容，接受了不少机械化的训练，只是人们并不自觉而已。

举例来说，在小学里用纸笔进行的加减乘除四则运算，就完全是机械化的，正因为如此，才有可能在十七世纪时巴斯嗒利用齿轮转动制造成加法机器，稍后莱伯尼兹又把它改进成乘法机器。而到现代，四则运算已可在电子计算机上实现。如果没有小学里那种已经成为机械化的算法，这些都将是不可能的。

如果检查一下数学两千年来的发展史，可以看到数学多次重大的跃进都无不与数学的机械化有关。例如算术有许多四则难题，每题求解都需要巧思，但出现了代数以后，许多问题的入手与解答成为机械性的，变得轻而易举，中学生也很容易学

会了。又如欧几里得几何的定理证明，添线往往是一种很高超的艺术，而与机械化毫无共同之处，但出现了解析几何，证明定理就有些机械化而容易入手。再如求极大极小问题，稍难一些就需特殊技巧或无所措手，出现了微积分往往就变为机械地算一下导数就行了。虽然这些都还算不上真正的机械化或半机械化，但总是提高了机械化的程度，在机械化的道路上迈进了一大步，在历史上也都成为数学进展的划时代标志。

在长期的实践中随着人们认识的演化，人们逐渐意识到数学机械化的优越性。十七世纪的莱伯尼兹，不仅对数学计算制造了乘法机器，还对数学中的逻辑推理提出了机械化证明定理的设想。到了本世纪，由于数理逻辑的出现而使人们的认识更为明确，又由于电子计算机的出现，因而原来的设想已经进入到如何具体实现的阶段，使数学的发展面临一个前所未有的新时代。

敬爱的周总理早在一九五六年时就已指出，电子计算机已可开始有条件地代替一部分特定的脑力劳动，就象其他机器代替体力劳动一样。我国在体力劳动机械化的革命中曾经落在许多现已成为发达国家的后面，在当前这场脑力劳动机械化的革命中，我国决不能重蹈覆辙，而应努力争取走在世界各国的前面。我国在古代是一个数学大国，它的数学的特点之一是它基本上是一种机械化的数学。缅怀过去，瞻望未来，数学理应充当当前这场新的革命中的一名先锋战士，使我国早日成为一个实现了机械化的现代数学大国。

# 数学中的公理化与机械化思想

在全国人民向四个现代化进军的今天，究竟什么是数学的现代化，怎样才能实现数学的现代化，是每个数学工作者不能不关心的问题。为了摸索这一问题的答案，了解一下古今数学思想的发展历史，是不为无益的。

我个人认为：贯串在整个数学发展历史过程中有两个中心思想，一是公理化思想，另一是机械化思想。前者似已不必多费笔墨，欧几里得几何原本是这方面历史上的代表作，也是公理化思想的滥觞，在现代数学尤其是纯粹数学中占据着统治地位。后者则似有必要稍加说明。

试以中学数学为例。中学的数学课本是一个奇妙的混合物：公理化与机械化的方法内容杂然并陈。欧几里得式的平面几何在整个课程中占据了公理化的一个角落；而代数部分则有丰富的机械化成份。解线性联立方程组所用各种消去法就是典型的机械化方法。三十年代中学数学教本广泛论述的 Sturm 定理无非是代数方程求实根数目的一个机械化方法。至于解析几何，则把几何与代数结合在一起，两种成份都有，但既非此也非彼，而且结合得并不很好，前后并不连贯。例如平面几何费大量篇幅、时间于三角形的全等，但对于解析几何最简单最基本的中点或分点公式，要用到关于梯形中位线或平行分比的定理，一般在中学课本中却很少提及，至少是不够突出，而且

由于点的位置牵涉到线段的正负，与平面几何部分更显得脱节。如果拘泥于公理化所强调的推理严密性的要求，则一般书中对这一段的论述大都是不合格的。这类有可挑剔之处在中学数学课本中屡见不鲜。

公理化的思想导源于古希腊，机械化的思想则贯串于整个中国的古代数学。秦汉时代就已成书的《九章算术》，是具有这一思想的代表作，线性联立方程组的解法及有关正负数概念与移项法则，最早就已见于此书。《九章算术》两千多年来一直影响与指导着中国数学的发展，为数学做出了巨大贡献（虽然直到现在还没有被一般人所认识），与欧几里得几何原本东西辉映，各呈特色。中学数学实际上正反映了历史上这两种数学思想与方法的汇合，只是这种汇合还不够合拍，并没有做到浑然一体，有机地溶合在一起。

机械化的思想与方法并不仅见于中小学的数学课本，实际上在现代纯粹数学的研究中也一直发挥着它的作用与影响，举例来说，本世纪的数学巨子法国的 E. Cartan，在他关于微分方程、微分几何与李群的浩瀚著作中，经常显出机械化思维的特色，他的儿子 H. Cartan，是当代数学名家，其最重要的工作之一是关于拓扑学中 $K(\pi,n)$ 同调群的计算，可以看作是运用机械化方法取得成功的一个典范。即使是以公理化著称的数学大师 Hilbert，在他公理化方法的代表作《几何基础》中，全书主要部分的最后一条定理在实质上就是为某一类交点定理提供了一个机械化的证明方法。在他倡导之下蓬勃发展起来的数理逻辑，其作用之一就是在于摸索一条机械化证明数学定理的道路。当前许多数理逻辑学家都重视或从事机器证明的工作，这决不是偶然的。有着两千多年历史成为机械化代表作的

线性联立方程组解法，一直是中学数学所不可缺少的组成部分，也是数学实践中最常用到的部分。历史较晚的另一机械化代表作 Sturm 定理，虽然由于公理化运动的影响以及某些数学学派的轻视，从三十年代以来逐渐从数学著作中消失，但晚近却又卷土重来，重新出现于一些数学名家的代数学教本之中。随着计算机的出现与其使用日见普及，机械化的方法与作用已日益为数学家所认识。不少在纯粹数学上卓有成就的数学家，正日益重视计算机与机械化方法在纯粹数学中的使用并为之鼓吹。机械化思想的历史功绩是不可磨灭的，它未来的生命力更是无比旺盛的。

公理化与机械化的思想与方法，都曾对数学的历史发展做出了巨大的贡献，今后也仍将继续做出巨大的贡献。我们既不能厚此薄彼，也不能重彼而轻此。为了实现数学的现代化，我们必须吸收渊源于西方的公理化方法的长处，也应珍视我国古代的遗产，从有着历史渊源的机械化方法中吸取力量。这两种方法的溶合，或许能为数学的未来发展提供一些新的摸索途径。

以上略陈管见，以作争鸣之用。

# 初等几何判定问题<br>与机械化证明


## 摘　要

机械化证明定理，目前值得注意的是Tarski关于初等几何与初等代数定理的机械证明法。他以及后来一些研究工作者的方法，大都基于Sturm定理的某种推广，这些方法仍极繁复，因之即使使用了计算机，实际上也是难以实现的。本文的目的，在于把定理限制在不牵涉到“之间”关系的情形，应用完全不同的原理给出初等几何定理的机械化证法。这种方法仅用手算即可给出不太简单的定理的证明。


## 一、问题的提出

Tarski在1948年的一篇经典著作[1]中，解决了实闭域的判定问题，其主要目的之一，是给出初等几何定理的机械化证明。以后Seidenberg[2]，Robinson[3]与Cohen[4]等人又给出了Tarski定理的不同证法。这些作者还提出了制作某种判定机器以实现这些机械化证明的建议，但是，这种建议离实现之期似颇遥远[5,6]。事实上，只有一些极不足道的初等几何定理，曾在计算机上证明过，例如文献[7,8]。本文的目的

是在不考虑点的“之间”关系的情况下，给出初等几何判定问题的另一解法。我们的解法，依据了与前面那些作者所使用的完全不同的原理，提供了几何定理的机械化证明，即使颇为困难的定理，仅用纸和笔也往往可实现。依据这种方法编成程序，在计算机上进行计算，也不会发生实质上的困难。

我们考虑的仅限于平面初等几何，虽然所用方法也可应用于其它各种几何。方法的第一步，在于几何问题的代数化。平面中的点，将定义为某一固定域，例如有理数域$R$上的有序数偶。其次是建立一部辞典，把几何关系翻译成为代数形式，不妨把这些看作定义或公理。例如对于若干个点$A_i=(x_i,y_i)$，不论重合与否，可规定：

$A_1A_2$ 平行于 $A_3A_4$，

如果 $(x_1-x_2)(y_3-y_4)-(x_3-x_4)(y_1-y_2)=0$，

$A_1A_2$ 垂直于 $A_3A_4$，

如果 $(x_1-x_2)(x_3-x_4)+(y_1-y_2)(y_3-y_4)=0$，

$A_1A_2$ 的长度平方为 $r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$，

等等。

如果把基本域$R$易为其它的域，或把点当作其它类型的数组，或改变公理中的代数形式，例如把上面长度平方函数$r^2$改为函数$r^4=(x_1-x_2)^4+(y_1-y_2)^4$，我们即进入别的几何领域，例如非欧几何，实或复的投影几何，有限几何，等等。但在本文中，将以平面初等几何为限，因为它可以说是具有代表性的。

作为说明，先举一个简单的例子如下。

试考虑下述语句：

$(S_n)$设$A_0A_1A_2$是一直角三角形，直角在$A_0$，记直角边

$A_0A_1$，$A_0A_2$ 的长为 $x_1$，$x_2$，斜边的长为 $x_3$，则有

$$x_1^n+x_2^n=x_3^n。$$

我们的问题是如何判定语句（$S_n$）的真伪。我们所用以证明或否定（$S_n$）的判定算法，应对初等几何中的一切类似的语句（不考虑“之间”的关系）都同样适用。

为解决这一问题，首先注意在语句中出现的那些点，在语句假设所含的条件限制之下，具有普定性质，因此，若将这些点用座标表示为 $A_0=(x_0,v_0)$，$A_1=(u_1,v_1)$，$A_2=(u_2,v_2)$，诸座标 $v_0$，$u_1$，$v_1$，$u_2$，$v_2$ 可视为不定量，而其它座标与几何度量 $x_0$，$x_1$，$x_2$，$x_3$ 则代数地依赖于这些不定量，依据语句（$S_n$）中的假设为以下诸代数方程所制约：

$$f_0\equiv(u_1-x_0)(u_2-x_0)+(v_1-v_0)(v_2-v_0)=0,$$

$$f_1\equiv x_1^2-(u_1-x_0)^2-(v_1-v_0)^2=0,$$

$$f_2\equiv x_2^2-(u_2-x_0)^2-(v_2-v_0)^2=0,$$

$$f_3\equiv x_3^2-(u_1-u_2)^2-(v_1-v_2)^2=0。$$

至于语句 $S_n$ 中的结论则相当于等式

$$g_n\equiv x_n^3-x_1^n-x_2^n=0。$$

在以后，将以 $R$ 表示有理数域，并取之为基本域。命 $A^9$ 为 $R$ 上的 9 维仿射空间，以（$v_0$，$u_1$，$v_1$，$u_2$，$v_2$，$x_0$，$x_1$，$x_2$，$x_3$）为座标，并按上述确定次序排列。于是以上诸方程 $f_i=0$ 在 $A^9$ 中定义了一个 5 维的代数簇，在本例中，在 $R$ 上不可约，并有普点例如（$v_0$，$u_1$，$v_1$，$u_2$，$v_2$，$\bar{x}_0$，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\bar{x}_3$），其中 $v_0$、$u_1$，$v_1$，$u_2$，$v_2$ 为独立的不定量。于是语句（$S_n$）的真伪相当于

$$g_n 在 V 上 \equiv 0$$

或

$$g_n 在 V 上 \not\equiv 0。$$

由以上分析可知，一般的判定问题可依下面的形式表达。

问题　在一$R$上以$(u_1,\ \cdots,\ u_d,\ x_1,\ \cdots x_n)$为座标的$n=r+d$维仿射空间$A^n$中，设有一代数簇$V$，其定义方程是$(u_1,\ \cdots u_d$是独立的不定量)：

$$\left.\begin{array}{l} f_1(u_1,\ \cdots u_d,\ x_1),\ =0, \\ f_2(u_1,\ \cdots u_d,\ x_1,\ x_2)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(u_1,\ \cdots,\ u_d,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r)=0。\end{array}\right\} \quad (\text{I})$$

这一代数簇$V$分裂成若干不可约成份，其维数假定都$\leqslant d$，其中$d$维成份的总和为$V^*$，通常与$V$相合。$V^*$的每一成份具有形如$(u_1,\ \cdots,\ u_d,\ \bar{x}_1,\ \cdots,\ \bar{x}_r)$的普点，其中$\bar{x}_i$都是域

$$K=R(u_1,\ \cdots,\ u_d)$$

上的代数量。另设有一多项式$g(u_1,\ \cdots,\ u_d,\ x_1,\ \cdots,\ x_r)$或多项式组$g_k\in R[u_1,\ \cdots,\ u_d,\ x_1,\ \cdots,\ x_r]$。问题是要依据一种算法来判定在$V^*$上是否

$$g\equiv 0\ (\text{或}\ g_k\equiv 0)。$$

在上述问题的提法中，代数簇$V$或$V^*$反映了几何语句中的假设部分。$V$或$V^*$将称为该语句的相关簇。若视簇$V^*$为定义于域$K=R(u_1,\ \cdots,u_d)$上时，其维数为0。方程组(Ⅰ)的形式说明代数依赖的变量$x_1,\ \cdots,\ x_r$应依次地逐一添入域$K$。这反映了这样的几何事实：在某些普定的直线或圆上取某些普定的点，又应用作联线，平行线，垂直线或圆，并取直线或圆的交点等等几何手续，依次代数地添入新的点。这些几何作法产生含有$x$与$u$的代数方程，只须用简单的消去法即可化成方程组(Ⅰ)的形式。因为事实上$x$与$u$间的原始方程很少会是超过2次的。我们将称变量$u$为参量而$x$为依量。其次注意$V$的诸

不可约成份在$R$上的维数都$\leqslant d$这一条件，无非反映了我们所考虑的几何语句都具有确定性质，而把考虑限制于$V^*$，则指退化情形将排除在外。这两者事实上都是通常几何定理中隐含，而不加明述的假设。至于多项式$g$或$g_k$在$V^*$上$=0$，则是所需证明或否决的语句中结论部分的代数等价式。在以下，我们将称$g$或$g_k$为相应几何语句的判定多项式(组)。

在理论上，Hermann[9]所用的方法，早就足以给出上述判定问题的算法的解答。但是，他的方法如此繁复，不可避免地要引起诸算式的天文数字般的膨胀，以致即使是最简单不过的几何定理，也无法加以证明。相反，我们在下面所用的判定方法，利用了方程组(Ⅰ)的特殊形式，只需用纸笔即可给出很不简单的定理以机械化的证明。

我们的判定方法依据了以下三个定理，证明见第四节。

**定理1** 有一算法，据此可将任一确定性几何语句由(Ⅰ)式定义的相关簇$V^*$，分裂成$R$上的不可约成份，使每一$d$维成份$V'$视作定义于域$K=R(u_1, \cdots, u_d)$上时，有一形如$(p_1, \cdots, p_r)$的基(即相应素理想的基)，具有以下诸性质：

(1) 每一$p_i$是一$R[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_i]$中的多项式，对$x_i$的次数$m_i>0$。

(2) 视$p_i$为$x_i$的多项式时，其系数都是$R[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_{i-1}]$中的多项式，设有公共因子，且对每一$j=1, \cdots, i-1$，$x_j$的次数都小于$m_j$。

(3) 视$p_i$为$x_i$的多项式时，其主系数是$R[u_1, \cdots, u_d]$中的多项式且$\neq 0$。

(4) 作为$x_1$的多项式$p_1$，在域$K=R(u_1, \cdots, u_d)$中不可约。又对每一$i>1$，视作$x_i$的多项式$p_i$，在依方程$p_1=0$，

…，$p_{i-1}=0$ 将 $x_1$，…，$x_{i-1}$ 添入 $K$ 中所得的扩充域上不可约。

显然多项式 $p_1$，…，$p_r$ 为 $V'$ 所唯一确定到 $R$ 中的因子，我们将称之为构成 $V'$ 的一个优选基（更正确地说是 $V'$ 在 $K$ 上的素理想的一个优选基）。但须注意，诸依量 $x_1$，…，$x_r$ 依照所给定的次序排列，又注意这一概念事实上为 Gröbner 所引入，被称为素基，如参阅文献[10]，又可参阅文献[11]中与此密切相关的一个概念：Characteristic sets。

**定理 2** 设 $(p_1, \cdots, p_r)$ 是相关簇 $V$ 的任一不可约成份 $V'$ 的优选基。有一算法，据此足以对任一 $R[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_r]$ 中的多项式 $h$，确定一等式形如

$$Dh=\sum_{i_j=0}^{m_j-1} h_{i_1\cdots i_r} x^{i_1}\cdots x^{i_r}+\sum_{i=1}^{r} A_i p_i$$

使满足以下诸条件：

(1) $D$，$h_{i_1\cdots i_r}$ 都是 $R[u_1, \cdots, u_d]$ 中的多项式，且 $D\neq 0$。

(2) $A_i$ 都是 $R[u_1, \cdots, u_d, x_1, \cdots, x_r]$ 中的多项式。

诸多项式 $h_{i_1\cdots i_n}$ 由算法所唯一确定至 $R$ 中的因子，将称为多项式 $h$ 相应于 $V'$ 的优选基 $(p_1, \cdots, p_r)$ 的余系式，或简称为相应于 $V'$ 的余系式。

**定理 3** 相关簇是 $V$ 而判定多项式(组)是 $g$（或 $g_k$）的一个几何语句，其成立的充要条件是：任意取定依量 $x_1$，…，$x_r$ 的一个固定次序后，$g$（或 $g_k$）对 $V^*$ 的任一不可约成份 $V'$ 的一切余系式都恒等于 0。

## 二、举　例

在给出这些定理的证明之前（见第四节），先举数例说明其

应用如下：

例1　对于本文开始所举直角三角形的语句（$S_n$），可见相关簇$V$的参量与依量各取为$v_0$，$u_1$，$u_2$，$v_1$，$v_2$与$x_0,x_1,x_2,x_3$时，在$R$中不可约且有一优选基（$p_1$，$p_2$，$p_3$，$p_4$）如下：

$$p_1=x_0^2-(u_1+u_2)x_0+u_1u_2+(v_1-v_0)(v_2-v_0),$$

$$p_2=x_1^2+(u_1-u_2)x_0-u_1^2+u_1u_2-(v_1-v_0)(v_1-v_2),$$

$$p_3=x_2^2-(u_1-u_2)x_0-u_2^2+u_1u_2+(v_2-v_0)(v_1-v_2),$$

$$p_4=x_3^2-(u_1-u_2)^2-(v_1-v_2)^2,$$

由此得

$$g_2=p_4-p_2-p_3。$$

而在$n>2$时，有

$$g_n\neq 0 \bmod (p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)。$$

因此语句（$S_n$）只在$n=2$时成立，即所谓勾股定理。

例2　我们的判定方法可用以给出三角恒等式的机械化证明。例如试考虑下述语句：

（S）　若$A_1+A_2+A_3=180°$，则

$$\sin 2A_1+\sin 2A_2+\sin 2A_3=4\sin A_1\sin A_2\sin A_3。$$

（C）　若$A_1+A_2+A_3=180°$，则

$$\cos 2A_1+\cos 2A_2+\cos 2A_3+4\cos A_1\cos A_2\cos A_3=0。$$

为判定（S）或（C）的真实性，先置

$$\sin A_i=s_i,\ \cos A_i=c_i\ (i=1,2),$$

$$\sin 2A_i=x_i,\ \cos 2A_i=y_i\ (i=1,2,3),$$

$$\sin A_3=z_1,\ \cos A_3=z_2。$$

取$c_1$与$c_2$为参量，而

$$s_1,\ s_2,\ z_1,\ z_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3$$

为依量（依上述次序），则（$S$）与（$C$）的相关簇已在

$R$中不可约，且有一优选基（$p_1$，…，$p_{10}$）如下：

$$p_1 = s_1^2 + c_1^2 - 1, \qquad p_2 = s_2^2 + c_2^2 - 1,$$
$$p_3 = z_1 - c_2 s_1 - c_1 s_2, \qquad p_4 = z_2 - s_1 s_2 + c_1 c_2,$$
$$p_5 = x_1 - 2c_1 s_1, \qquad p_6 = x_2 - 2c_2 s_2,$$
$$p_7 = x_3 - 2z_1 z_2, \qquad p_8 = y_1 - 2c_1^2 + 1,$$
$$p_9 = y_2 - 2c_2^2 + 1, \qquad p_{10} = y_3 + 4c_1 c_2 s_1 s_2 - 4c_1^2 c_2^2 + 2c_1^2 + 2c_2^2 - 1。$$

语句（$S$）与（$C$）的判定多项式各为：

$$g_s = x_1 + x_2 + x_3 - 4s_1 s_2 z_1,$$
$$g_c = y_1 + y_2 + y_3 + 4c_1 c_2 z_2。$$

验算得

$$g_s = p_7 + p_6 + p_5 + 2z_1 p_4 - 2p_3(s_1 s_2 + c_1 c_2) - 2c_1 s_1 p_2 - 2c_2 s_2 p_1$$
$$\equiv 0 \bmod (p_1, \cdots, p_{10})。$$
$$g_c = -1 + p_{10} + p_9 + p_8 + 4c_1 c_2 p_4$$
$$\not\equiv 0 \bmod (p_1, \cdots, p_{10})。$$

由此知（$S$）给出一真恒等式而（$C$）则不然。

例 3　试考虑 Simson 线定理，其相应语句为：

（$S_s$）　从 $\triangle A_1A_2A_3$ 外接圆上一点 $A_4$，向三角形三边作垂线，其垂足必同在一直线上。

为证此，可简化取外接圆心为 (0,0)，而半径为 $r$。记 $A_i(i=1, 2, 3, 4)$ 为 $(x_i, u_i)$，而垂足 $A_j$ 为 $(x_j, y_j)$，$j=5$, 6, 7。以 $r$, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ 作为参量，

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ x_5,\ x_6,\ x_7$$

为依量，其次序即如上述。

相关 Simson 簇不可约，且有优选基（$p_1$,…，$p_{10}$）如下：

$$p_1 = x_1^2 + u_1^2 - r^2, \qquad p_2 = x_2^2 + u_2^2 - r^2,$$

$$p_3 = x_3^2 + u_3^2 - r^2, \qquad p_4 = x_4^2 + u_4^2 - r^2,$$

$$p_5 = 2r^2 y_5 - h_5, \qquad p_6 = 2r^2 y_6 - h_6,$$

$$p_7 = 2r^2 y_7 - h_7, \qquad p_8 = u_{23}x_5 - x_{23}y_5 + u_3 x_2 - u_2 x_3,$$

$$p_9 = u_{31}x_6 - x_{31}y_6 + u_1 x_3 - u_3 x_1, \qquad p_{10} = u_{12}x_7 - x_{12}y_7 + u_2 x_1 - u_1 x_2。$$

在上面的方程中，已采用了下述简化符号：

$$\left.\begin{matrix} u_{ij} = u_i - u_j \\ x_{ij} = x_i - x_j \end{matrix}\right\}(i, j = 1, 2, 3)$$

$$h_5 = u_4 x_2 x_3 - (u_2 x_3 + u_3 x_2)x_4 + r^2(u_2 + u_3 + u_4) - u_2 u_3 u_4。$$

$h_6$ 与 $h_7$ 式与此类似。

判定多项式为

$$g = x_5(y_6 - y_7) + x_6(y_7 - y_5) + x_7(y_5 - y_6)。$$

直截的计算给出

$$g \equiv 0 \bmod (p_1, \cdots, p_{10}),$$

这证明了 Simson 语句$(S_s)$的真确性。

例 4　作为一个比较非不足道的例子，试考虑 Feuerbach 定理，它的相应语句为：

$(S_F)$　三角形的九点圆与四个内切傍切圆相切。

试记三角形的三顶点为 $(2u_i, 2v_i)$，九点圆的中心为 $(x_1, y_1)$，半径为 $r_1$，而任一内切或傍切圆的中心为$(x_2, y_2)$，半径为 $r_2$，又引入变量 $z_1$，$z_2$，$z_3$ 各与三角形三边之长相当，于是以 $u_1$，$v_1$，$u_2$，$v_2$，$u_3$，$v_3$ 为参量，而 $z_1$，$z_2$，$z_3$，$x_1$，$y_1$，$x_2$，$y_2$，$r_1$，$r_2$ 为依量（次序如上）时，相关 Feuerbach 簇 $V_F$ 分裂成四个不可约簇，具有以下形式的优选基 $(p_1, \cdots, p_9)$：

$$p_1 = z_1^2 - u_{23}^2 - v_{23}^2, \qquad p_2 = z_2^2 - u_{31}^2 - v_{31}^2,$$

$$p_3 = z_3^2 - u_{12}^2 - v_{12}^2, \qquad p_4 = 4\Delta x_1 - \alpha_1,$$

$$p_5 = 4\Delta y_1 - \beta_1, \qquad p_6 = 2\Delta x_2 - \alpha_2,$$

$$p_7 = 2\Delta y_2 - \beta_2, \qquad p_8 = 4\Delta r_1 - z_1 z_2 z_3,$$

$$p_9 = 2\Delta r_2 + \gamma。$$

在以上诸公式中，我们采用了下面的简记符号（$e_i = \pm 1$）：

$$u_{ij} = u_i - u_j, \quad v_{ij} = v_i - v_j \quad (i, j = 1,2,3),$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_1 = v_{23}v_{31}v_{12} + u_1^2 v_{23} + u_2^2 v_{31} + u_3^2 v_{12} - 2(u_2 u_3 v_{23} + u_3 u_1 v_{31} + u_1 u_2 v_{12}),$$

$$\beta_1 = -u_{23}u_{31}u_{12} - v_1^2 u_{23} - v_2^2 u_{31} - v_3^2 u_{12} + 2(v_2 v_3 u_{23} + v_3 v_1 u_{31} + v_1 v_2 u_{12}),$$

$$\alpha_2 = -[v_{23}v_{31}v_{12} + v_1(u_2^2 - u_3^2) + v_2(u_3^2 - u_1^2) + v_3(u_1^2 - u_2^2) + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_{23} z_2 z_3 + \varepsilon_3 e_1 v_{31} z_3 z_1 + e_1 \varepsilon_2 v_{12} z_1 z_2],$$

$$\beta_2 = u_{23}u_{31}u_{12} + u_1(v_2^2 - v_3^2) + u_2(v_3^2 - v_1^2) + u_3(v_1^2 - v_2^2) + \varepsilon_2\varepsilon_3 u_{23} z_2 z_3 + \varepsilon_3 e_1 u_{31} z_3 z_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 u_{12} z_1 z_2,$$

$$\gamma = \varepsilon_1(u_{31}u_{12} + v_{31}v_{12}) z_1 + \varepsilon_2(u_{12}u_{23} + v_{12}v_{23}) z_2 + \varepsilon_3(u_{23}u_{31} + v_{23}v_{31}) z_3 + \varepsilon_1 e_2 e_3 z_1 z_2 z_3。$$

注意 $e_i = +1$ 或 $-1$ 的选择相应于四个内切或傍切圆，并反映了 Feuerbach 簇的分裂。

语句（$S_F$）的判定多项式形如

$$g_s = (\eta r_1 - r_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2,$$

其中 $\eta=+1$ 或 $-1$。通过冗长繁复，但直截了当的计算，验得在 $\eta=+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ 时，$g\eta$ 为 $p_1\cdots,p_9$ 的线性组合，而在 $\eta=-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ 时则不然。由此知 Feuerbach 语句 $(S_F)$ 为一真实定理，而 $\eta=+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ 则反映了九点圆与相应内切或傍切圆之间的相切方式。注意：在我们问题的提法下"之间"关系并不考虑在内，因而圆的相切方式我们并不重视。因此，我们可以取 $g=g_{+1}\cdot g_{-1}$ 为判定多项式，同样也可不引入 $z_1$，$z_2$，$z_3$，而在 $u_i$，$v_i$，$x_j,y_j$，$r_j$ 的仿射空间中取定 Feuerbach 簇，这样它在一开始就将是不可约的。

## 三、一 些 引 理

为了证明定理作些准备，本节中将考虑一个在基本域 $R$ 上的扩充域 $R(u_1,\cdots,u_d,x_1,\cdots,x_r)$，其中 $u_1$，$\cdots,u_d$ 在 $R$ 上超越，而 $x_1$，$\cdots$，$x_r$ 在 $R$ 上是代数的，后者的代数扩充则由以下诸方程所确定：

$$\left.\begin{aligned}
&p_1(x_1)\equiv p_{10}x_1^{m_1}+p_{11}x_1^{m_1-1}+\cdots+p_{1m}=0,\\
&p_2(x_1,x_2)\equiv p_{20}x_2^{m_2}+p_{21}x_2^{m_2-1}+\cdots+p_{2m_2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_r(x_1,\cdots,x_r)\equiv p_{r0}x_r^{m_r}+p_{r1}x_r^{m_r-1}+\cdots+p_{rm_r}=0。
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

我们假定对 $1\leqslant i\leqslant r$，诸 $p_{ij}$ 都是环

$$P_{i-1}=R[u_1,\cdots,u_d,x_1,\cdots,x_{i-1}]$$

中的多项式，$p_{i0}$ 都是

$$P_0=R[u_1,\cdots,u_d]$$

中 $\neq 0$ 的多项式，而将 $p_i$ 视为 $x_i$ 的多项式时，$p_i$ 在由

$$p_1(x_1)=0, \cdots, p_{i-1}(x_1,\cdots,x_{i-1})=0$$

等方程所定的域

$$K_{i-1}=R(u_1,\cdots,u_d,x_1,\cdots,x_{i-1})$$

上不可约。这里 $K_0$ 指域 $K_0=K=R(u_1,\cdots,u_d)$。

以 $\mathscr{I}$ 表示一切指数组 $I=(i_1,\cdots,i_r)$ 的集体，其中 $0\leqslant i_j\leqslant m_j-1$。对这些 $I$ 将采用形式记号

$$x^I=x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r},$$

任一形如

$$A=\sum a_I x^I$$

的多项式，其中 $a_I$ 为某一环或域 $F$ 中的元素时，将称为 $F[x_1,\cdots,x_r]$ 中的一个**规范多项式**。

**引理1** 有一算法，足以对任一 $p_r$ 中的多项式 $A$，唯一地确定一组整数 $s_1,\cdots,s_r\geqslant 0$ 与一组 $p_0$ 中的多项式 $A_I, I\in\mathscr{I}$，使满足以下诸条件：

(1)$_1$ 除去 $P_r$ 上 $p_i$ 间的一个线性组合外，有

$$p_{10}^{s_1}\cdots p_{r0}^{s_r}A\equiv\sum A_I x^I。$$

(2)$_2$ $A_I$ 都是 $P_0$ 中的多项式，其系数对 $A$ 作为 $P_r$ 中多项式的系数说来是线性的。

(3)$_3$ $s_1$, $\cdots$, $s_r\geqslant 0$ 是使 $(L1)_1$ 与 $(L1)_2$ 成立的最小整数。

**证** 视 $A$ 与 $p_r$ 为系数在 $P_{r-1}$ 中的 $x_r$ 的多项式，应用除法即可得一最小整数 $s_r\geqslant 0$，使下式成立：

$$p_{r0}^{s_r}A=Q_r p_r+R_{r-1};$$

其中 $Q_r$，$R_{r-1}$ 为 $p_r$ 中的多项式，而 $R_{r-1}$ 对 $x_r$ 的次数 $<m_r$。今视 $p_r$ 与 $R_{r-1}$ 为系数在 $R[u_1,\cdots,u_d, x_1,\cdots,x_{r-2}, x_r]$ 中的 $x_{r-1}$ 的多项式，仍用除法可得一最小整数 $s_{r-1}\geqslant 0$，使下式成立：

$$p^{s_{r-1}}_{r-1,0}R_{r-1} = Q_{r-1}p_{r-1} + R_{r-2},$$

其中 $Q_{r-1}$，$R_{r-1}$ 都是 $P_r$ 中的多项式，而 $R_{r-2}$ 对 $x_r$ 与 $x_{r-1}$ 的次数各$<m_r$ 与 $m_{r-1}$。依次进行，可相继得：

$$p^{s_{r-2}}_{r-2,0}R_{r-2} = Q_{r-2}p_{r-2} + R_{r-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{10}{}^{s_1}R_1 = Q_1p_1 + R_0,$$

其中 $R_0$ 为－$P_r$ 中的多项式，对 $x_i$ 的次数$<m_i$，$1\leqslant i\leqslant r_1$ 于是可将 $R_0$ 写成$\sum A_i x^i$，而得引理所需符合诸条件的多项式。

**引理 2**　有一算法足以对任一以 $y$ 为不定量的多项式

$$A = A_0y^m + A_1y^{m-1} + \cdots + A_m,$$

其中 $A_i \in P_r$，而 $A_0$ 在 $K_r$ 中$\neq 0$，确定以下两式：

$$HA = B + C_1p_1 + \cdots + C_rp_r,$$

$$B = B_0y^m + B_1y^{m-1} + \cdots + B_m,$$

使满足以下诸条件：

(1) 诸 $B_i$ 都是 $P_r$ 中的规范多项式，且 $B_0$ 是 $P_0$ 中$\neq 0$ 的多项式。

(2) $C_i$ 都是 $P_r[y]$，而 $H$ 是 $P_r$ 中的多项式。

(3) $H \not\equiv 0 \bmod(p_1, \cdots, p_r)$，

任意满足条件 (1) 的多项式 $B$，将称为 $P_r$ 上以 $y$ 为不定量的规范多项式。

**证**　由引理 1 可得整数 $s_1$，…，$s_r \geqslant 0$ 与下式：

$$p_{10}{}^{s_1}\cdots p^{s_r}_{r0}A$$
$$= A'_0y^m + A'_1y^{m-1} + \cdots + A'_m \bmod(p_1, \cdots, p_r),$$

其中 $A'_i$ 都是 $p_r$ 中的规范多项式，且 $A'_0$ 在 $K_r$ 中$\neq 0$。设 $A'_0$ 与 $x_{i+1}$，…，$x_r$ 无关，但确实含有 $x_i$，因 $A'_0$ 对 $x_i$ 的次数$<m_i$，$p_i$ 对 $x_i$ 的次数为 $m_i$，且在 $K_{i-1}$ 中不可约，故由通常的除法程

序算法可得 $P_i$ 中的多项式 $h$，$k$ 以及 $P_{i-1}$ 中的多项式 $A'_{00}$，使

$$hA'_0+kp_i=A'_{00},$$

其中 $h$ 在 $K_i$ 中 $\neq 0$，而 $A'_{00}$ 在 $K_{i-1}$ 中 $\neq 0$。由此得下式：

$$hp_{10}^{s_1}\cdots p_{r0}^{s_r}A+kp_iy^m=A'_{00}y^m+hA'_1y^{m-1}+\cdots$$
$$+hA'_m\mathrm{mod}(p_1,\cdots,p_r)。$$

应用引理1于 $A'_i$ 与 $A'_{00}$，可得下式：

$$h''A=A_0''y^m+A_1''y^{m-1}+\cdots+A_m''\mathrm{mod}(p_1,\cdots,p_r),$$

其中 $A''_i$ 都是 $P_r$ 中的规范多项式，$A''_0$ 在 $K_r$ 中 $\neq 0$，且不含有任一 $x_j$，$j\geqslant i$。又 $h''$ 为 $P_r$ 中的多项式，且在 $K_r$ 中 $\neq 0$。若 $A''_0$ 中不再含有任一 $x_1$，…，$x_r$，即可取 $A''_{00}y^m+A''_1y^{m-1}+\cdots+A''_m$ 为引理所需的多项式 $B$，否则如前进行即得证明。

引理3　有一算法足以对 $P_r[y]$ 中的任一多项式

$$A=A_0y^m+A_1y^{m-1}+\cdots+A_m,$$

在 $K_r$ 中作因子分解（诸 $A_i$ 都 $\in P_r$，且 $A_0$ 在 $K_r$ 中 $\neq 0$，又 $m\geqslant 2$）。详言之，即可确定形式

$$HA=A'+\sum C_ip_i,$$
$$A'=\bar{A}_1\cdots\bar{A}_l。$$

使以下诸条件满足：

(1) 诸 $\bar{A}_j$ 都是 $P_r[y]$ 中的规范多项式，且在 $K_r$ 中不可约。

(2) $H$ 是 $P_r$ 中的多项式，且在 $K_r$ 中 $\neq 0$。

(3) $C_i$ 都是 $P_r[y]$ 中的多项式。

**证**　Hermann 在文献[9]中的方法给出了 $A$ 在 $K_r$ 中的因子分解。在通分后即得形式

$$DA=B_1\cdots B_l+\sum B'_ip_i,$$

其中 $B_i$，$B'_i$ 都是 $P_r[y]$中的多项式，$B_i$ 在 $K_r$ 中不可约，$D$ 是 $p_r$ 中的多项式，而在 $K_r$ 中 $\neq 0$ 。对每一 $B_i$ 应用引理 2 即得所需的形式。又可参阅文献[12，p.130]。

## 四、定理的证明

至此定理 1—3 可容易地证明如下。

**定理 1 的证明。**

对于相关簇 $V$ 的定义方程组（Ⅰ）试视 $f_1\ (u_1,\cdots,u_d,\ x_1)$ 为一 $x_1$ 的多项式，以 $R[u_1,\cdots,u_d]$中的多项式为系数，依据引理 3 的算法，而以 $x_1$ 作为 $y$，0 作为 $r$，可将 $f_1$ 分解为 $K$ 中的不可约规范因子。任取其一为 $p_1(x_1)$，命 $K_1$ 为将 $x_1$ 依方程

$$p_1(x_1)=0$$

添加于域 $K=R(u_1,\cdots,u_d)$所得的扩充域。今视 $f_2$ 为不定量 $x_2$ 的多项式时，必不能在域 $K_1$ 中恒等于 0，否则簇 $V$ 的维数将 $>d$，这与原来几何语句的确定性假设相违。今将 $x_2$ 作为 $y$，1 作为 $r$，而应用引理 3 于 $f_2$，即得--$R[u_1,\cdots,u_d,x_1,x_2,]$ 中的多项式 $f'_2$ 与一式如

$$h_2f_2=f'_2+C_{21}p_1。$$

这里 $f'_2$ 视为不定量 $x_2$ 的多项式时，在 $K_1$ 中 $\neq 0$，且已分解成 $K_1$ 中不可约的规范多项式的乘积。任取一因子为 $p_2(x_1,x_2)$，命 $K_2$ 为将 $x_2$ 依方程

$$p_2(x_1,x_2)=0,$$

添入 $K_1$ 后所得的扩充域。于是 $f_3$ 为 $K_2$ 上不定量 $x_3$ 的多项式，且不恒等于 0 。今再依引理 3 以得一式

$$h_3f_3=f'_3+C_{31}p_1+C_{32}p_2,$$

其中 $x_3$ 的多项式 $f'_3$ 已分解为规范多项式的乘积，且每一因子在 $K_2$ 中不可约。任取一因子为 $p_3(x_1,x_2,x_3)$，并依方程

$$p_3(x_1,x_2,x_3)=0,$$

将 $x_3$ 添入 $K_2$ 以得 $K_3$。如此依法进行，即可得一组子簇 $V'$，每一$V'$ 都在 $R$ 上不可约。且在 $K$ 上有一如下类型的定义方程组：

$$\begin{cases} p_1(x_1)=0, \\ p_2(x_1,x_2)=0, \\ \cdots \\ p_r(x_1,\cdots,x_r)=0 \end{cases} \qquad (III)$$

它满足若干明显的条件如第三节所述。

易见，这些子簇构成了整个所给的相关簇 $V^*$。盖考虑 $V^*$ 在 $R$ 中的任一不可约成份，并设 $(u_1,\ \cdots,\ u_d,\ \bar{x}_1,\ \cdots,\ \bar{x}_r)$是它的一个普点，其中 $u_1,\ \cdots,\ u_d$ 是独立的不定量，而 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_r$ 代数地依赖于这些 $u$ 。因 $(u_1,\ \cdots,\ u_d,\ \bar{x}_1)$ 必须满足方程组（I），特别应满足 $f_1$，故至少需满足 $f_1$ 的一个不可约因子，不妨设即为前面的 $p_1(x_1)$。因$(u_1,\cdots,u_d,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ 必须满足方程组（I）中的其它诸方程以及方程 $p_1(x_1)=0$，故由前面关于 $f'_2$ 的等式知，这一点也将满足方程$f'_2=0$，因而至少须满足 $f'_2$ 的某一不可约因子，设即为前面的 $p_2(x_1,x_2)$。依次进行可知，$(u_1,\cdots,u_d,\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_r\cdots)$应满足类型如(III)式的一组方程，而为前面所得不可约子簇组中某一个的普点。这就证明了定理 1 。

**定理 2 与 3 的证明。**

定理 2 从引理 1 立即可以得出。定理 3 则从定理 1 与定理 2 得出。

**附注。**

我们关于初等几何定理机械化证明所用的算法，主要牵涉

到一些多项式的运用技术，例如算术运算与简单消元法之类。应该指出，这些都是十二至十四世纪宋元时期中国数学家的创造，在那时已有相当高度的发展。详细介绍可参阅钱宝琮的著作[13]。事实上，几何问题的代数化与用代数方法系统求解，乃是当时中国数学家主要成就之一，其时间远在十七世纪出现解析几何之前。

## 参考文献


[1] Tarski, A. & Mekinscy, J. C. C,. A Pecision Method for Elementary Algebra and Geometry, 2nd ed., Berkeley and Los Angeles, 1948—1951（中译本：初等代数和几何的判定法，科学出版社，1959）。

[2] Seidenberg, A., Annals of Math., 60 (1954).365—374.

[3] Robinsin, A., Introduction to model Thorg and to the Metamathematics of Algebra, Amsterdem, 1963.

[4] Cohen, P. J,, Comm, Pure Appl. Math., 22(1969), 131—152.

[5] Robinson, A., Leet· Notes in Math., 1975. 498, 14—40.

[6] ———, in Proc. of Tarski Symposium, 1974, 139—152.

[7] Mcharem, J. D. et al. IEEE Trans. on Computers, C25(1976), 773—782.

[8] Keiter, K., IEEE Trans. on Computers, C-25 (1976), 328—334.

[9] Hermann, G., Math. Ann., 95 (1926), 736—788.

[10] Gröbner, W., Moderne Algebraische Geometrie. Wien. 1949.

[11] Ritt, R. F., Differential Algeera, 1950.

[12] Waerden, Van der, Moderne Algebra, Bd. 1, 1930.

[13] 钱宝琮，中国数学史，科学出版社，1964。

# 几何学机械化方法及其应用

几何学机械化方法，起源于十二、三世纪宋元时期初次出现的几何学代数化，将几何学问题化为多项式问题，以及相伴而生的多项式组消去法。近年来，作者初次利用计算机将这种方法施之于初等几何定理的机器证明与机器发明，稍后又推广之于微分几何，获得了一点成果，介绍如下。

固定一组变量 $x_1,\cdots,x_n$，以及特征为 0 的域 $k$，以下所谓多项式，都指在 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 中而言。

多项式组 $TPS=\{f_1,\cdots f_n\}$ 称为是三角形的，如果可将 $x_1,\cdots x_n$ 分成两部分，各记为 $u_1,\cdots,u_s$ 与 $y_1,\cdots y_r(r+s=n)$，使诸 $f$ 具有以下形式，并符合诸条件 $(c_1-c_2)$

$$f_1=I_1y_1^{m_1}+y_1\text{ 的低次项，}$$
$$f_2=I_2y_2^{m_2}+y_2\text{ 的低次项，}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n=I_ny_n^{m_n}+y_n\text{ 的低次项。}$$

条件是：

$(c_1)$ $f_i$ 中诸 $y_i$ 项的系数都是 $k[u,y_1,\cdots,y_{i-1}]$ 的多项式，

$(c_2)$ $I_i$ 中 $y_j$ $(j<i)$ 的次数都 $<m_j$，诸 $I_i$ 称为初式。

对于任意多项式 $G$，可唯一确定一式

$$I_1^{s_1}\cdots I_n^{s_n}G=\Sigma Q_jf_j+R,$$

其中 $s_i\geq 0$，$Q_i\in k[x_1,\cdots x_n]$，$R\in k[x_1,\cdots x_n]=k[u,y_1,$

$\cdots\cdots y_n]$，而 $R$ 中 $y_i$ 的次数都小于 $m_i$，称为 $G$ 对 $TPS$ 的余式，记作 $R=Remdr\ (G/TPS)$。

三角形多项式组 $TPS$ 将称为不可约的，如果诸 $f_i$ 对 $y_i$ 而言在扩域 $k(u,y_1,\cdots,y_{i-1})$ 中都是不可约的，这时 $u$ 的个数 $n$ 称为 $TPS$ 的维数，记作 $dimTPS$。

对于任一多项式组 $PS$ 以及另一多项式 $H$，我们将以 $Zeno\ (PS/H)$ 表示，在 $k$ 的任一扩域中使 $PS=0$ 但又不使 $H=0$ 的那些零点的集体。

我们的机械化方法，奠基于下面两个定理，

Ⅰ（Ritt原理）：

任给一多项式组 $PS$，可机械地得出一三角形多项式组 $TPS$（不唯一，称 $PS$ 的特征组），使

（1） $Zero(TPS/J)\subset Zero(PS)\subset Zero(TPS)$。

（2） $Zero(PS)=Zero(TPS/J)+\Sigma Zero(PSi)$。

其中 $J$ 指 $TPS$ 中诸初式 $I_i$ 的乘积，$PS_i$ 指将 $I_i$ 添入 $PS$ 后的多项式组。

Ⅱ（零点分解定理）：

任给一多项式组 $PS$ 与另一多项式 $H$，可机械地得出一个分解（不唯一）

$$Zero(PS/H)=\Sigma Zero(IRRi/Ri)。$$

其中 $IRRi$ 都是不可约三角形多项式组，而 $Remdr(Ri/IRRi)\neq 0$。

这两定理都可自然地推广于微分多项式组。

现应用由这两个定理所构成的机械化方法解决下述各问题。

1．初等几何定理的机器证明与机器发明。

设与所考虑定理假设相当的多项式组为 $HYP$，求证的结论相当于多项式 $CONC$，依零点分解定理，可机械地求得分解

$$Zero(HYP)=\Sigma Zero(IRRi/R_i)。$$

设 $dimIRRi=d_i$，$d=Maxd_i$，则定理成立的充要条件是

$Remdn(CONC/IRRi)=0$，$d_i=d$时。

$$\underset{d_i<d}{\Sigma Zer_O}(IRRi/Ri)$$

提供了使定理可能不成立的退化部分。

由于分解式不甚易求，故在实际应用中使用了 *Ritt* 原理

$$Zeno(HYP)=Zeno(TPS/J)+\Sigma Zeno(HYPi)。$$

于是在 $Remdn(CONC/TPS)=0$ 时，即在 $J\neq 0$ 的非退化条件下定理成立。这给出了证明定理的充分条件。在上述条件不满足时，可再进而分解以进行之。

吴文俊、周咸青、王浩集体都曾依据这一方法（主要是充分条件的部分），已经证明并发明了大量定理。对于某一类所谓 Hilbent 型定理，胡森、王东明还编制了特殊的程序，也证明和发明了不少定理。

我们的方法，普遍使用于各种初等几何，包括非欧几何、圆几何等。

2．微分几何定理的机器证明与机器发明。

由于我们的方法依据（*Ritt* 原理与零点分解原理）可自然地推广到微分多项式，因而定理的机器证明与发明也可自然地推广到微分几何。现在对度量空间与仿射空间中 Bentnard 型曲线偶的定理，已做了较详的分析，其它方面的工作在逐步进行中。

3．未知关系的机械推导。

某些几何量间应有的未知关系，可应用以上方法自然地自行求出。例如，在一双曲型非欧平面中一个三角形三边之长已知时，我们的机械化方法可自动给出三角形的面积以三边之长表达的形式。双曲型非欧空间中四面体体积的求法，是一个似乎迄今还未获得很好解决的难题，我们的方法提供了一个可以尝试的另一种途径。

类似的问题是大量的，因而我们的方法在应用上有广阔的前景。

4．高次代数方程组求解问题。

对于一个三角形的多项式组，其相应方程组的求解可以归结为单个变量高次方程逐个求解的问题，不论是求复数解、实数解，或整数解，都有众多的现成方法可行。因而零点分解定理提供了一个方法，对于任意一组高次代数方程，可以判断是否有解无解，或有有穷多解和无穷多解，不论事先规定是实解或整数解或否都可。在恰有有限多个解时，可将这些解的全体无增无漏地全部求出。由于整个过程可以形式地进行，直到分成三角形后再进行数值求解，因而误差积累的严重性较小。我们曾以之与国外已有依据多项式处理的两种方法比较，对于他们所提出的例子，我们的方法要优越得多。

由于解高次方程组的问题是普遍出现的，而且实际中广泛使用的超越函数，事实上往往可用多项式来代替，因而我们这一方法的应用前景是很乐观的。

5．因子分解问题。

多变量多项式的因子分解，是计算机科学中一个既重要又极为困难的问题，近年来国外提出了一些较好的方法，其理论依据并不简单。胡森、王东明同志指出，对于整系数多项式在

有理数域或任意代数数域中的分解因子，可化为一个求某种特殊形式多项式方程组的整数解问题，由此得到了因子分解的一个新方法。对于某些国外刊物上依据国外的方法在大型计算机上分解因子的实例，胡森、王东明用他们的方法仅用手算即已很快完成，因而不仅理论简明且方法效率也较国外已知方法要优越。

我国宋元时代所引进的多项式概念与运算以及消元方法，由于其存在的普遍性，在此基础上发展起来的机械化方法，能够获得广泛的应用是自然的。由于表面上看来是超越函数或超越方程定义的概念，有许多可以多项式或微分多项式来取代，因而现代数学中众多领域，都有可能使用这样的方法。

迄今为止，由于设备条件等的限制，我们只使用了微型机或与之相当的小型机，因而进展缓慢，但收获已经不小。今后由于方法与程序的本身改进，特别由于计算机的迅猛发展，内存与计算速度每年成倍增长，可以预见应用计算机来解决所有能机械化的问题，必将收到更大的效果。

计算机的使用不仅对计算机科学，而且对纯粹数学也会提出新的可能从未想到过的课题，计算机的使用与纯粹数学的纯理论研究应该是统一的，而决不是某些人所认为的那样是对立的。

# 数学的机械化与机械化的数学

数值计算与定理证明是数学中两项最主要的活动形式。王浩先生[1]在关于机械化数学的论著中，曾列举了这两种活动的若干不同之点。总的说来，计算易而繁，证明妙而难。计算之所以容易，主要是由于计算过程往往已经或易于做到刻板化或机械化。正由于已机械化，才有可能使十七世纪时巴斯嘈用齿轮传动造出了加法机，并由莱伯尼兹改进成乘法机，到了现代更使已经机械化了的多种计算过程通过电子计算机实现了自动化。与之相反，即使叙述颇为简单的初中几何证明题，也往往使许多大几何学家棘手。如何使定理证明化难为易，甚至不惜弃简就繁，乃是机械化证明的目的所在。为此提出下面的问题：定理证明是否也可像数值计算那样机械化，进而通过电子计算机以实现定理证明的自动化。

这一问题并非完全是现代的产物。事实上，早在十七世纪莱伯尼兹时就有机械化证明的设想。只是直到十九世纪末及以后由于希耳伯特及其追随者们建立并发展了数理逻辑，这一问题才具有明确的数学形式。又由于四十年代电子计算机的出现，才使这一设想有了现实的意义。几十年来，数理逻辑学家为这一问题付出了巨大劳动，但是，他们所得到的成果基本上是反面的，即所谓不可判定性，例如有：

**苟得尔定理** 初等整数论的定理证明不可能机械化。

值得称道的正面的结果则有

**泰斯基定理 T**[2]初等几何(以及初等代数)的定理证明可以机械化。

泰斯基等还因之提出制造所谓判定机器(也就是证明机)的设想。然而他们的方法与设想都不是切实可行的。1976年IEEE刊物上有一篇关于美国机器证明试验的报道[3、4]，用泰斯基方法于电子计算机只能证明一些近于同义反复的儿戏式"定理"，例如，"若 $P_1$，…，$P_5$ 五点中 $P_1,P_2,P_3$ 又 $P_1,P_2,P_4$ 又 $P_1,P_2,P_5$ 各在一条直线上，则 $P_3,P_4,P_5$ 也在一条直线上。"总之，直到目前为止，国外对于机械化证明的尝试处于胶着状态，劳而少功，实质上是失败的。

但是，甚至在1899年出版希耳伯特的经典著作《几何基础》[5]中，就有着耐人寻味的正面的机械化结果，只是从来没有人注意过，也许包括希耳伯特自己在内。该书向来被认为是公理化的典范，但实质上希耳伯特却指出了(也许是不自觉的)如何从公理化通过代数化到达机械化的道路。作为该书主体部分前六章的最后一个定理(第八版定理62)，即可解释成为下面的：

**希耳伯特机械化定理 H** 初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化。

这一定理自然是泰斯基定理 $T$ 的一个特例。但与泰斯基定理不同，希耳伯特的机械化证明方法是切实可行的。甚至只用手算就可证明颇为复杂非不足道的(只涉及从属与平行关系的)定理。依据它也不难编成程序在计算机上实现。

现将希耳伯特的机械化方法大致说明如下。

希耳伯特把初等几何的公理分成五类：(Ⅰ)从属公理，(Ⅱ)次序公理，(Ⅲ)全合公理，(Ⅳ)平行公理，(Ⅴ)连续公理。

现假定空间的第Ⅰ，Ⅱ类公理与第Ⅳ类公理成立，则在直线上任意取定两点 0 与 I，直线上的点之间即可引进加法与乘法以得一满足通常的结合、交换与分配等定律的数系统，其中 0 与 I 各与 0 与 1 相当，但乘法交换律除外。如果我们的几何是所谓巴斯喀几何，即巴斯喀定理成立，则这一数系统也将满足乘法交换律，依据希耳伯特的证明，如此所得的数系统与直线以及上面 0 与 I 的选择无关，即唯一确定至一同构。在空间中任取三个不同平面的共点直线以公共点作为这些直线上建立数系统时的 0 点，则依通常方法即可建立一座标系统，点、直线、平面等几何元素可用数系统中的数或数之比来表示。把它们统称为几何数标，则一切几何元素间的从属或平行关系都可通过它们的几何数标的多项式等式关系来表达，而多项式中每一数标的次数都是一次。这就是希耳伯特从公理化出发以到达代数化的具体步骤。

一个通常的几何定理，无非是说如果某些几何元素满足若干几何关系（假设），则它们必将满足某一几何关系（终结）。任取一座标系并把它们都用数标表示则其中某些数标可以是任意的，称之为参数，另一些则须受假设中几何关系的约束而不再任意，称之为束数。又由于定理中的几何元素往往是通过联线，作平行线，相交等手续逐步作出，因而可将这些数标排成某一次序，并将参数与束数各依次记为 $u_1,\cdots,u_d$ 以及 $x_1,\cdots,x_r$。经过简单化约即可将假设表述为下面的方程组：

$$A_i x_i + B_i = 0\ ,\quad i = 1,\cdots,r, \tag{1}$$

其中，$A_i$，$B_i$ 都是 $u_1,\cdots,u_d$ 与 $x_1,\cdots,x_{i-1}$ 的多项式。同样终结可表达为

$$g(u_1,\cdots,u_d,x_1,\cdots,x_r) = 0\ , \tag{2}$$

其中，$g$ 也是多项式。于是原来的几何定理无非是说：

方程(2)是方程组(1)的自然结果。

这一断言是否成立是容易验证的。事实上，从式(1)经过逐步约化可依次得

$$x_i = P_i/Q_i, \quad i = 1, \cdots, r, \tag{3}$$

其中，$P_i$，$Q_i$ 都是 $u_1, \cdots, u_d$ 的多项式。代入 $g$ 中，得

$$g = g\left(u_1, \cdots, u_d, \frac{P_1}{Q_1}, \cdots, \frac{P_r}{Q_r}\right)。$$

由于 $u$ 都是参数，$g$ 之是否为 0 即可直接从计算得出。

显然所有的过程都可机械地进行，这就是希耳伯特的机械化证明方法。这一结果也可概括为

**希耳伯特机械化定理 P** 巴斯喀几何的定理证明可以机械化。

由于巴斯喀定理可利用全合公理证明，因而定理 $P$ 自然包括了希耳伯特机械化定理 $H$。

在 1976 与 1977 年之交，作者开始从事定理证明的机械化问题，获得了下面的结论[6]

**定理 1** 初等几何中只牵涉到从属、平行与全合关系的定理证明可以机械化。

我们机械化证明方法实质上与希耳伯特的方法不约而同。例如与前同样选择座标系，将诸几何元素的数标分成参数与束数两类并排成次序为 $u_1, \cdots, u_d$ 与 $x_1, \cdots, x_r$。所不同者是与假设部分相当的方程不再对每一 $x_i$ 是线性的，而有较一般的形式：

$$P_{i0}x_i^{m_i} + P_{i1}x_i^{m_i-1} + \cdots + P_{im_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, r, \tag{4}$$

其中，诸 $P_{ij}$ 都是 $u_1, \cdots, u_d$ 与 $x_1, \cdots x_{i-1}$ 的多项式。记基域

添加$u_1,\cdots u_d$后的域为$K_0$，则在通常可称为“不可约”的情形，在$K_0$中$P_{10}\neq 0$，且(4)$_1$不可约。记$K_0$添加满足(4)$_1$的$x_1$后的域为$K_1$，则在$K_1$中$P_{20}\neq 0$，且(4)$_2$不可约，依次类推。记(4)$_i$的左边为$f_i$，则任一多项式$g(u_1,\cdots,u_d,x_1,\cdots x_r)$用除法可得

$$P_{10}^{s_1}\cdots P_{r0}^{s_r}g=g^0+\sum_{i=1} h_i f_i,$$

其中，$g^0$对每一$x_i$的次数都$<m_i$，称为$g$对$f_i$的余式。于是定理结论式(2)成立的充要条件是余式$g^0=0$。在一般情形即$f_i$在相应域中非不可约时，则可先将$f_i$分解因子后进行，而分解因子的手续也是可以机械化的。

显然定理1包括了希耳伯特的定理$H$，但仍包括于泰斯基的定理$T$之中。然而，与希耳伯特定理相似而与泰斯基定理不同，我们的机械化方法是切实可行的，即使用手算也可证明例如富尔巴赫那样艰深的定理。据此编成程序以在计算机上实现并无实质上的困难。数学所陈东岳等同志以及美国王浩先生都曾在电子计算机上实施过。作者本人也曾在国产长城203台式机上实施过。三者都曾证明西姆森线那样非不足道的定理。我们的经验是：即使是一台小型台式计算机，只须容量足够大(现在$HP$ 9835或9845型台式机的内存已可达到256 $K$以至400余$K$字节，这里每字节合8字位)，应可证明极为繁复艰深的定理，而计算时间完全可以接受(例如几个或几十个小时)。

我们还可对所需计算量作出理论的估计，如下面的

**定理2** 初等几何中只牵涉从属、平行与全同关系且“不可约”的定理证明，其计算量满足下面的关系：

计算复杂度≤定理复杂度·几何复杂度。

上述定理中“不可约”即前面提到通常的情形，往往从定理叙述的几何内容即可一望而知。计算复杂度依斯特拉逊定义[7]，定理复杂度与几何复杂度可用具体的公式表达，也可从“图形”直接读出。

1977与1978年之交，作者又将初等几何的结果推广至初等微分几何，即[8]

**定理3** 初等微分几何中凡可用微分多项式等式关系来表达的定理的证明可以机械化。

这里定理证明的机械化方法依赖于里奇埃与里脱关于微分方程与微分代数的理论与方法[9]，比初等几何的情形要复杂得多。但据之以编成程序以在计算机上实现仍非难事，而且粗略估计一具 *HP* 型的台式计算机应该已足够了。

上面一些结果的相互关系可用图形示意表达。

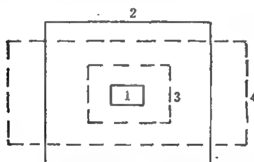



图1

直到现在，我们还没有找到一种切实可行的方法来实现整个初等几何定理证明的机械化。这牵涉到希耳伯特著名的第17问题。这一问题虽已在1926年为阿丁所解决[10]，但他的解决方法只是存在性的。阿丁曾提出寻找构造性解决方法的问题，经过四十多年到近年才出现这样的方法[11]，但仍不是切实可

行的。而且希耳伯特第17问题的提法与我们的要求还有距离。总之，这是一个理论的探索性问题，解决似非易事。

另一方面，我们的结果适用于各种克来因型的几何，而不只是初等几何而已。

我们的结果还表明，尽管某一数学领域整个说来是不可能机械化的，但并不排除其中一部分可以机械化。如何发现这样一些可以机械化的部分领域，提出切实可行的机械化方法，又是一项高度理论的探索性问题，只有对该领域有深邃认识才有解决的希望。

最后应该指出：我们从事机械化定理证明工作获得成果之前，并不了解泰斯基的已有工作，更没有想到与希耳伯特《几何基础》会有任何关系。事实上，我们是在中国古代数学的学习与启发之下提出问题并想出解决办法来的。其根本原因是：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学，而几何的代数化又是宋元时期我国数学的主要成就。我们的研究工作还只是一个开端。如何继续发扬中国古代传统数学的机械化特色，对数学各个不同领域探索实现机械化的途径，建立机械化的数学，则是本世纪以至可能绵亘整个二十一世纪才能大体趋于完善的事。

## 参 考 文 献


[1] Wang Hao, IBM J. Res. Dev. 4 (1960), 2—22.

[2] Tarski. A., A decision method for elementary algebra and geometry, 1951 (陆钟万译，1959)。

[3] Kister, K., IEEE Trans on Computers C-25 (1976), 328—334.

[4] Mcharem, J. D., et al., ibid, 773—782.

[5] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 8ed., 1956 (江泽涵等译，1958)。
[6] 吴文俊，《中国科学》(1977)，507—516。
[7] Von V. Strassen, J. & M. V. 78 (1976), 1—8.
[8] 吴文俊，《科学通报》(1978)，523—524。
[9] Ritt, R. F., Differential algebra, 1950.
[10] Artin, E., Hamb, Abh., 5 (1927), 100—115.
[11] Pfister, in Mathematical developments arising from Hilbert problems, vol. 2(1976). 483—490.

# 《几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)》的导言

几何学起源于人们观天测地这一类实践活动，这一点似已成为定论，无可置疑。但不同地区的人们在总结各种经验，综合上升为理论，最后发展成为一门科学的过程中，却有着不同的方式、方法与途径。恩格斯说过，“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”。古希腊时代，对待几何学就有两种不同的方法：一种可以欧几里得的《几何原本》为代表，把数量关系完全排除在外，而单纯追求各种几何事实间的逻辑关系，以此建立几何公理体系，成为数学中演绎推理方法的典范；另一种可以阿基米德的有关著作为代表，着重研究几何图形的数量特征或其量度，诸如圆周率、球面面积以及抛物线弓形面积的计算等等。尽管这二者各具特色，风格殊异，体现了几何发展中的两种不同体系，但都为数学发展作出了巨大贡献。

我国几何学的发展则是始终与数量关系形影不离的。诸如面积、体积的量度以及关于勾股定理的应用，在我国古代几何中一直占据着中心位置。那时我国没有陷入烦琐的成堆公理之中，而是提炼出几条一般原理，并以此作为广泛应用与推理论证的依据。例如，出入相补原理、体积理论中的刘徽原理以及与十六世纪欧洲出现的Cavalieri原理相当的刘祖原理等。所谓阿基米德与欧几里得的两种不同体系，在我国古代几何中兼而有之。勾股定理自然地引起平方根的计算问题，而我国古代求

平方根和立方根的方法，其步骤就是以出入相补原理为几何背景逐步索骥而得。由平方根和立方根的计算逐步发展为二次以至高次方程的解法及其理论，最后导致天元术的发现以及几何的代数化、多项式的运算与消去法等。本书所阐述的几何定理证明的机械化问题，从思维到方法，至少在宋元时代就有蛛丝马迹可寻。虽然这是极其原始的，但是，仅就著者本人而言，主要是受中国古代数学的启发。

在古代几何的发展中，由于对数量关系的不同认识而引起了各种倾向，直到十七世纪解析几何的出现才得到了统一。这使得几何的问题可以用代数的方法来处理，以致可以避免欧几里得那种几何综合证法所需要的高度技巧。虽然几何综合方法以其直观引人入胜，且曾在十九世纪有过一段复兴的时期，但终究难与解析几何的代数方法相匹敌。现代几何学的许多最重要的领域，例如微分几何与代数几何，往往一开始就假定了一个数系统（一般是一个数域，甚至是特殊的实数域与复数域），由此构成仿射空间或投影空间，然后用坐标或以函数与导数间的代数关系式来引进各种几何图形，如曲线、曲面及其几何关系等等。纯正的从公理出发的综合方法只占据着一个较小的、主要是初等的角落，且应用这种方法往往是出于对几何学基础上的考虑才对公理间的逻辑关系进行细致的分析，并不是为了丰富几何学的具体内容而叠瓦添砖。在数的基础上建立起整个几何学的大厦，看来已是大势所趋。

然而，尽管几何学可以从纯粹数量关系的形式上建立起来，但总不能不考虑几何的直观背景与来源，也不能不考虑它的基础问题。如何从原始的现实形象提炼出一套几何学的公理系统（或若干原理），又如何从公理系统发展到坐标系统，使代数方

法得以在几何中发挥作用，这些都是应当说明的问题。对于称为欧几里得的那种常见常用的几何学，在 Hilbert 的《几何基础》（见 Hilbert〔2〕）这一经典著作中已经作了详尽的论述。我们容易认为，从几何公理引入坐标建立解析几何是轻而易举的事情。但这是由于我们运用了关于实数系统与初等几何的全部知识所产生的错觉。事实上，这一过程是颇为曲折与艰难的，我们仅从 Hilbert 的书如何依据公理系统引入数系统再引入坐标的过程就可以看清楚。在此过程中，Hilbert 所称的两条 Desargues 公理以及一条 Pascal 公理扮演了极其重要的角色，而且就象本书第二章和第六章所指出的那样，投影几何与仿射几何数系统的引入有很大的区别。虽然这两者都只依赖 Desargues 公理（以及一些最简单的关联公理等）就可在各直线上引入彼此同构的数系统，但对于仿射几何，这些数系统之间有唯一确定(Canonical）的同构关系，而投影几何则只能在所谓 Pappus 公理成立的假定下才能唯一确定这些同构。一般的几何学著作，似乎都忽略了这一点，其原因之一可能是偏重于欧几里得传统，着眼于公理间的逻辑关系，而置数系统与坐标的引入于次要的地位，或直接从数系统出发建立几何学，而不再考虑几何对象的现实来源与公理基础。把公理系统与数量关系之间的沟通作为探讨的主题，迄今为止，Hilbert 的书仍是最具代表性的著作。由此还可看出，即使是人所熟知的那种投影几何与仿射几何，其坐标的引入也决非如通常想象的那样简单。至于奠基于种种不同的公理系统之上的各种不同几何，其数系统与坐标系统引入的困难程度，就更不难想象了。

不仅如此，即便从公理系统出发，到达了坐标系统并建立了相应的解析几何，使几何定理的证明完全化成纯代数问题，

也并不见得就一定容易。首先，由于解决这些代数问题的计算量往往过大，使人望而却步；其次因为代表几何关系而出现的那些代数关系式往往杂乱无章，使人无所措手。从这些杂乱无章的代数关系式中要找出一条途径，以到达要证明的那些关系式往往需要高度的技巧。这只要翻阅一下过去的大量著作，例如Salmon〔1，2，3〕等书就清楚了。现在，由于计算机的出现，对繁杂的计算已经有了有效的处理办法。因此，如何把杂乱无章的代数关系式整理得井然有序，使计算机得以发挥其威力，便成为整个问题的关键所在。

至此，几何定理的证明问题可以分成下面三个主要步骤：

第一步，从几何的公理系统出发，引进数系统与坐标系统，使任意几何定理的证明问题成为纯代数问题。

第二步，将几何定理假设部分的代数关系式进行整理，然后依确定步骤验证定理终结部分的代数关系式是否可以从假设部分已整理成序的代数关系式中推出。

第三步，依据第二步中的确定步骤编成程序，并在计算机上实施。以得出定理是否成立的最后结论。

我们称第一步为几何的**代数化与坐标化**，第二步为几何的**机械化**，至于第三步能否使用计算机作最后验证，完全依赖于第二步机械化之是否可能。由于计算机只能识别有限的事物，因此一个先决条件乃是第二步中的代数关系式必须都以有限的形式出现。所以，如果第二步中的代数关系式牵涉到连续、极限一类概念，甚至以超越函数的形式出现，即排除了使用计算机的可能性。相反，如果这些代数关系式都是以多项式的形式出现，且其系数都是整数，则对于计算机的使用只是依据第二步中所确定的步骤编制程序的问题，不会有任何实质的困难。如

果一门几何可以找到这样三步（事实上只要前面两步即可）来完成定理的证明，我们就说这门几何**可以机械化**，并把可以机械化的结论称为**机械化定理**。机械化定理是否成立，依赖于第一、二两步能否实现，而这两者完全是纯理论性的问题。

一门几何能否机械化，并不显然。相反，由于通常的各种几何广泛使用了连续、极限一类概念，尤其是微分几何离不开函数与微分，因而从表面上看似乎不能使用计算机进行证明。但事实上并非如此，其道理颇为深奥。按Hilbert的《几何基础》其重要的一点是说，通常几何的基础完全可以排除连续这样一类公理。在该书俄译本Rashevsky所作的序言中，就曾明确指出了其中心思想，实质上就是几何学的发展可与连续公理无关。在Hilbert的另一篇关于Bolyai-Lobachevsky非欧几何的文章（Hilbert〔2〕）之末，也明确指出了这一点。正因为如此，几何的公理、定理与证明，实质上都可以用有限次的构造步骤来叙述以至完成。这也就提供了几何定理证明有可能机械化的依据。就著者所知，最早的一条真正的机械化定理即见于Hilbert的《几何基础》一书，本书第三章即致力于这一机械化定理的证明，并称之为Hilbert机械化定理，参见Wu Wen-jun〔4〕。

同样的论点也适用于微分几何。如果抛开几何的实质，只从形式逻辑关系来考虑（定理的证明要求这一点已经足够），在微分几何的各种概念与定理的叙述中出现的那种函数与导数完全可以形式地来对待，而不必考虑其是否与真正的连续性或极限过程有关。因此，即使是微分几何的定理证明，也存在着通过有限次形式上的构造步骤借助于计算机来进行定理证明的可能性。事实上，情况也确实如此。我们已经通过计算机证明了微分几何的某些定理，而且在微型计算机上也做过一些试验，

参阅 Wu Wen-jun〔2,3〕两文。

我们把几何按其是否涉及微分而粗略地分成两大类，一类是微分几何，另一类则是所谓的初等几何。为方便，现改称通常称为欧氏几何的那种初等几何为常用几何。著者将陆续阐明各种几何机械化的理论与方法。本书只论述初等几何机械化的基本原理，在另一本与此并行的姐妹篇《几何定理机器证明的理论、方法与实践（初等几何部分）》中，将阐明这一机械化理论与方法在计算机上的具体实施，其中包括程序的编制，计算量的估计，具体定理的证明，新定理的发明以及几何的理论和方法对计算机使用效率的改进与各种应用等等。在本书以后的有关书籍中则将致力于阐述微分几何的机械化问题以及各种有关的理论问题。

本书共分六章。前两章是关于几何机械化的预备知识。作为实例，我们集中讨论常用几何，即通常所称的欧几里得几何，并详细说明从公理出发建立坐标系统的过程。为简便起见，只讨论平面情形；又为了讨论有所遵循，一切都围绕 Hilbert 所提出的五类公理进行（这五类公理是关联公理、次序公理、全合公理、平行公理与连续公理）。Hilbert 在建立常用几何时摈弃了连续公理，但次序公理和关联公理则贯穿在他的整个体系中，甚至全合概念与全合公理本身都不能独立于次序概念之外来叙述。如何不依赖于次序概念与次序公理而较早地引入垂直、全合以及其它度量概念，似乎为 Hjelmslev 首先提出，并一直延续到本世纪五、六十年代，参阅 Bachmann〔1〕及 Klingenberg，Lenz，Reidemeister，Schülte，Sperner，Winternitz 等的著作。他们的着眼点似在研究反应一些几何主要概念的不同公理组之间的逻辑依存关系。与此相反，本书的目的在于几何

的机械化，而不在于几何的公理化。对于公理的独立性与相互依存问题不是我们的旨趣所在。但是就机械化这一主题而论，在机械化的理论与方法上有无次序公理却大不相同。此外，在一些现代几何，例如代数几何中，主要考虑的是复数域或特征为0的任意数域，根本不存在任何次序关系。即使在有次序关系的几何中，真正涉及到次序关系的定理也并不占主要地位。凡此种种，说明在从公理出发建立几何时，次序关系有必要退居较次要的地位。为此，在前两章建立常用几何的过程中，次序关系尽量移后，而逐步引入各种无序几何与有序几何。在引入几何的数系统以完成前面第一步所说的代数化与坐标化时，虽然仍象 Hilbert 一书那样，主要依据以 Desargues 与 Pascal 命名的两条公理，但已不再象 Hilbert 那样把次序公理掺杂其间。此外，我们又添加了一条无限公理，借以排除一切有限几何。因为从机械化的角度来看，有限几何可以机械化是显然的。

本书的后四章致力于几何的机械化问题。传统的欧几里得证明定理的方法要求对个别的定理寻求个别的证法，而且每一证明总是要求某种新的、往往是奇巧的想法（参阅 Kline〔1〕的307—308页，中译本的Ⅰ.8）。本书关于几何定理证明的机械化寻求的是一般方法，它不仅适用于个别的定理，而且适用于整个某一类型的定理，甚至可以说是某一种几何的所有定理。只要依照书中所述的方法机械地进行，在有限步之后，就可对整个一类定理得到统一的证真或证伪，而无分难易，要做到这一点，必须通过以数量关系为主的代数方法来实现，而几何的代数化乃是关键性的一步。这正好符合 Descartes 采用代数方法把推理程序机械化以致减小解题工作量的想法（见 Kline〔1〕），也正象早期的几何代数化天元术的创立者之一，我

国元代朱世杰（十三世纪）在《算学启蒙》（1299）中说“以天元演之，明源活法，省功数倍”。总之，如果真能做到有效的机械化，则不妨借用 Chasles[1]269 页上的一句话：“为几何巨厦添砖加瓦，从此就用不着天才那样的人物了”。

并不是每一种几何或任意一类定理都能找到机械化的证法。对于确实可以进行机械化证明的定理，我们提出三种不同的类型，它们可以用三种机械化方法来证明，并将分别在三、四、五章中讨论。每一种类型都须假定第一步的代数化与坐标化已经完成，而且可把几何定理的证明问题化为一些代数关系式的处理问题。第一种类型定理的特征是假设部分的代数关系式对于某些特定变量都必须是线性的。这类定理包括所谓一类构造型的纯交点定理，其证明的机械化方法也见 Hilbert[1]。为此我们称这一结果为**Hilbert 机械化定理**。第二种类型定理的特征是假设与终结部分的代数关系式都可以多项式的方程来表示。这种类型定理的机械化证明方法在 Wu Wen-jun[2]一文中首先提出，并在多种计算机上实施过。第三种类型定理的特征是假设与终结部分可以是任意的多项式等式或不等式，但其系数必须在一实闭域中，因而原来的几何必须有次序关系。这种类型定理的机械化证法为 Tarski 在 1950 年[1]一文中给出，因而我们称相应的结果为 Tarski 机械化定理。上述三种机械化定理各有其适用的范围，特别是第二与第三两种互不包含。我们的机械化定理不适用于终结含有次序关系的那种定理的证明，而 Tarski 的机械化定理则只适用于几何数域为实闭

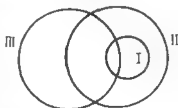


图 1

域而不能适用于几何数域为复数域或其它一般数域的情形。从适用的角度讲，三者（各以Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ表示）的相互关系如图1所示；就方法而论，则三者各异。因而在所属范围互相重叠的那些部分，其定理可用几种不同的机械化方法来证明。就证明的效率来讲，Ⅰ最高，即使用手算也可以证明颇不简单的定理。Ⅱ次之，用手算虽难以见功，但若使用计算机，即使是一台微型的计算机也可以证明很不简单的定理。至于Ⅲ，则效率颇低，迄今为止，还没有听说过据之以证出什么稍有意义的定理来，即使用大型快速的计算机也是如此。

由于 Hilbert 的机械化方法使用范围过狭，而 Tarski 的机械化方法效率又过低，故在本书的第三、五两章对此分别作了简短的介绍。重点是第四章。这一章的机械化方法在理论上需要代数几何的帮助。虽然现代的代数几何是当前数学中最活跃的分支，但是却不合我们的需要。原因是现代的代数几何几乎纯粹是存在性的，而对于机械化的要求来说，所提供的手段必须是构造性的，只有这样才有可能将相应的步骤在计算机上逐一实现。所幸的是，Ritt[1，2]两书中早已发展了这种代数几何的构造性理论，恰好符合我们的需要。只是 Ritt 的论证使用了分析的方法，而连续、极限等概念与机械化证法不相容，所以必须进行适当的改造。第四章中的部分内容即致力于此。其中如多项式组的约化整序等概念与方法都出自 Ritt，只是在叙述上有所不同。Ritt 方法还用于微分几何定理的机械化证明，其简略的叙述见 Wu Wen-jun[2,3]诸文。对此，著者在有关的书籍中将有更详尽的论证。

应用这几章的方法来考察几何，则可证明在第一、二章中通向常用几何的过程中所出现的各种无序的与有序的几何，从

所谓无序 Pascal 几何起，其定理的证明都可机械化。在第六章中，我们同样考察了与常用几何有别的一些几何，如投影几何、双曲型与椭圆型非欧几何、Möbius 与 Laguerre 的两种圆几何学等，证明了类似的机械化定理。因为这些几何从公理化到坐标化的过程颇为冗长，故不能象第一、二章那样再作详细论证。

虽然本书展示了不少可以机械化的几何，但决不是任意一种几何都可以机械化，关键在于 Pappus 或 Pascal 公理是否成立，或几何数系统中的乘法交换律是否成立。具体说来，我们有下面的推测：

推测 Desargues 几何不能机械化。

但我们未能证明这一推测，数理逻辑的专家们可能会作出正确的答案。

自著者在 1976 年和 1977 年之交发现本书第五章所示几何定理的机械化证明方法以来，已经荏苒五年有余。这期间，著者受到了许多鼓励，有时颇出本人意料之外的热心帮助。由于人数太多，无法一一列举，现只略举三人。

在理论上著者深切感谢胡世华同志和王浩先生的鼓励与支持。著者关于定理证明机械化的思想和方法与长期形成的传统思想方法相抵触，如果当时不是胡世华同志从数理逻辑的角度伊始就予以首肯，中途夭折也不是不可能的。至于王浩先生，他在机器证明上突破性的成就早已脍炙人口，而其有关机器证明的一些精辟论点，更是发人深省。诸如以量的复杂取代质的困难，以及基础机证与特例机证应有所区别等论点，都使著者在研究过程中深受启发。

孟繁书同志曾设法为著者在长城 203 台式计算机上进行实

践，提供了许多方便。由于在那台计算机上进行了几个月的实践，才使著者有决心设法购取一台较现代化的台式计算机进行多种试验。这些试验说明我们的方法可以付诸实践，而不致停留在纯理论上，成为纸上谈兵。因此，特向孟繁书同志致以最深切的谢意。

# 复兴构造性的数学

非构造性观点在现代数学研究中普遍流行。这种观点往往主要考虑对象的一些性质，如存在性、可能性等问题，不大关心如何求出解答、或将能行的方法予以有效的实现。应用上对构造性数学要求非常迫切。一个工程师对于方程解的存在唯一性不会有太多的兴趣，而更关心一些典型的特解，或利用微扰方法找出近似解。机器定理证明向数学提出许多构造性的问题，例如将代数簇如何分成不可约分支，把一正定多元多项式如何表示成为有理函数的平方和等。这些问题在非构造性观点下被搁置多年，目前尚无有效的处理方法。历史上，中国古代数学基本上是构造性的。在西方，非构造性观点从上世纪末才逐渐盛行。实际研究中有许多问题，一时难以给出构造性的处理，因而首先研究存在性、可能性等有关问题，但最终应是构造性的。值得注意的是，近来由于各种原因的促进，构造性观点的抬头有了一些明显趋势。

举一些例子。

例1　线性联立方程组。按非构造性的观点，仅考虑有没有解，解空间的性质等，构造性观点还要求给出求解方法。五十年代计算机的发展促使人们认真考虑这一问题，Cramer 办法形式漂亮，实际上并不可行，Gauss 消去法才是行之有效的。在中国，很早就出现了完整的消去法，于 50～100 B.C 成书的《九章算术》卷八方程术中就详细记述了这种方法。其中列举了若

干例题，第一问完整地给出了方法的步骤，其它各问则指出了不同的要点，且已出现正负数的概念。近来，我们用机器证明中的整序原理，对高次联立方程组提出类似的三角算法。

例2　方程论。其中代数基本定理非常重要，但它是非构造性的，进一步地给出求解方法按照Galois理论就必须有限制，只能求近似解，局限在实数范围内西方在十九世纪有Horner方法。中国发展到宋代，秦九韶（1247年）已提出完整的增乘开方法。近几年Smale、Kuhn等人分别根据前人的工作创造了一些方法，进一步提出概率可行性、同伦算法等概念，对算法的效率提出较满意的分析。

上面提到的Galois理论也是非构造性的。一般的高次（n≥5）方程若仅用加减乘除、开根号等运算是不可解的，因为对应的Galois群不可解。正因为没有有效的方法求Galois群，所以给了一个高次方程，我们还是无从知道它是否可解。从另一角度看，如果扩大求解的工具(例如包含椭圆函数等)，五次方程就可解。可见Galois理论本身还有很多问题。

例3　因式分解。看起来这好象是个简单问题。按非构造性的观点（或通常代数书中所写的），只考虑把整数环推广成一种唯一因子分解环（UFD），再研究UFD的一些性质（如UFD的多项式环仍是UFD等），可是对具体的环如何进行分解就不管了。近十年来由于计算机的影响，这问题重新引起注意，提出许多方法，效率并不高。

例4　代数几何。这是目前非常活跃的领域，有相当多的流派与研究代数几何的方法，可是除了J.F.Ritt的以外，基本上都是非构造性的。例如他们一开始就假定代数簇分解为不可分的或不可约的分支，然后研究不可约分支的几何性质等等。一

种简单、重要的情形是由一些多项式方程定义的代数簇：

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(x_1,\cdots,x_n)=0。\end{cases}$$

可是对这种代数簇如何分解成不可约分支并没有引起注意，研究中给出的不可约判别法并不实用。

在西方，数学研究的一个转折点是不变式论，在此以前的数学是构造性的，而且当时要求必须如此，要证明存在就必须同时给出求法，这当然是一种束缚。不变式的研究曾是十九世纪数学的中心课题之一，在几何研究中非常重要。例如在投影几何中，取齐次坐标 $(x,y)$，考虑 $n$ 个点，一般用 $n$ 次式子 $\sum a_i x^i y^{n-i}=0$ 表达。由 $n$ 个点（或 $a_i$）可以造出一些式子，其中有几何意义的应当在线性替换下不变或者相差一个因子，这种式子就是所谓不变式。不变式可以有很多个。例如若 $I_1, I_2$ 是，则 $I_1^2, I_1^2+I_2^2$ 也是。一个基本问题是能否找出有限个不变式，使得其它的都可以通过多项式表示出来。当时的研究是通过大量的计算，Gordan 彻底地解决了两个变数的情形。三个或更多个变数问题变得非常复杂、困难，不过 Hilbert 相当简洁地证明了有限基的存在性，当时的构造性观点感到难以接受，后来，Hilbert 也给出了如何求的方法*。不变式研究因为过于繁难沉寂下来，但是数学不能回避这种重要问题，如 Dieudonné 所说："不变式论象只不死鸟，屡次从灰烬中复生。"（见其《Invari-

---

* 尽管 Hilbert 是公理化的代表人物，他的许多工作是构造性的。如机器证明的想法由 Hilbert 数理逻辑的工作开始具体化，对只满足从属、平行关系的纯交点型定理，他实际上给出机械化的算法，现命名为 Hilbert 机械化定理。

ant Theory, Old and New》, Academic Press, Inc, 1970)。现在又开始有了新的研究。例如借助于计算机，可以期望将十九世纪不变式的计算推进一步，不变式论也会有更广泛的应用（如Mumford 在《Geometric Invariant Theory》中用此求解代数曲线的模空间问题）。最近，在 Bull of AMS, Vol 10(1984)。No.1 上有介绍十九世纪不变式论的长篇文章，提出了许多问题，一些十九世纪有关的书又予以重印，这也是构造性数学抬头的一个迹象。

前面提到，中国古代创造了方程术，增乘开方法等构造性的方法，它的数学基本上是构造性的。作者从事几何机器证明的研究就是在中国古代数学的启发下提出问题并想出解决办法的。继承中国的数学遗产的远景相当开阔，有待后人作长时间的努力。下面以中国剩余定理为例，说明构造性与非构造性方法的区别，特别看一看流传下来的中国的方法。

**中国剩余定理**：若 $m_1, \cdots, m_r$ 互素，$u_1, \cdots, u_r$ 已知，则存在唯一的 $u \in [0, m_1 \cdots m_r)$，使

$$u \equiv u_j (\bmod\ m_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, r。$$

非构造性证明**：唯一性没有问题，看存在性。

作映射：

$$[0, m_1, \cdots m_r) \longrightarrow Z_{m_1} \oplus \cdots \oplus Z_{m_r}$$

$$v_1 \longrightarrow (v(\bmod m_1), \cdots, v(\bmod m_r))。$$

映射是单的，两边都有 $M = m_1 m_2 \cdots m_r$ 个元素，因而两边是一一对应，证得存在性。

这是个很漂亮的证明，但是 $v$ 无从知道。

---

* 这两个证明引自Knuth, Arts of Programming, vol 2。

** 参见《钱宝琮科学史论文集》P536—537。

构造性证明*：先求出$N_j$，使

$$N_j \equiv \begin{cases} 1 & (\bmod m_j), \\ 0 & (\bmod m_k) \quad j \neq k。\end{cases}$$

$u_1N_1+u_2N_2+\cdots+u_rN_r$ 对$M$的余数就是解。

据 Euler 定理，可取

$$N_j \equiv (m_1 \cdots \widehat{m_j} \cdots m_r)^{\varphi(m_j)} \equiv 1(\bmod m_j),$$

$\varphi(m_j)$是 Euler 函数，它等于$(0, m_j)$中与 $m_j$ 互素的整数的个数，能够计算出来。

这个定理来自中国，早在《孙子算经》中已有此类问题，到秦九韶《数书九章》中成型，谓之"大衍求一术"。所谓求一，就是上面求 $N_j$，"大衍" 隐指天意或自然规律。一次同余式问题的解法是为适应天文学家修改历法的要求而产生的。秦九韶称"圣有大衍，微寓于《易》"，将其赋于一种神秘色彩。实际上，问题来源于天文，中国古代历法不象现在公历定耶稣诞生那一年为元年，而主要是根据日月运行的客观现象制定的。古代天文学家假设在远古时代有一年的冬至节气恰恰在甲子日的上午零时，并且日月合朔也与冬至节气一个时刻。有这么一天的年度称为上元，从上元到本年经过的年数称为上元积年。一个历法有了上元积年以后，任何一年的冬至节气的日名、时刻，与任何一月平朔的日名、时刻都很容易安排出来了。在既知本年冬至的日名（平文）、时刻和十一月平朔的日名时刻的条件下，推算这一年的上元积年是一个一次同余式问题。 设 $a$ 为一回归年（从冬至到冬至）日数，$R_1$ 为从本年冬至前的甲子日零时到冬至时的日数，$b$ 为一朔望月（从平朔到平朔）的日数，$R_2$ 为从十一月平朔时到冬至时的日数，那么上元积年满足下列同余式组：

$$aN \equiv R_1(\bmod 60)$$
$$\equiv R_2(\bmod b)。$$

古代著书的方式是先给出具体的问题(问)，和解答(答)，然后指出求解方法(术)。后人还可将体会与发展(包括证明)写进去(注)。到了宋代，出现了印刷术，秦九韶还加了“草”，以说明详细的计算过程。

秦九韶的方法：

为求 $N_j$，先找 $k_j$ 使

$$k_j m_1 \cdots \widehat{m_j} \cdots m_r \equiv 1 \pmod{m_j}。$$

则取 $N_j \equiv k_j m_1 \cdots \widehat{m_j} \cdots m_r$ 即可。

兹举《数书九章》大衍类最后一道题“余米推数”如下。

问：有米铺，诉被盗去米一般三箩，皆适满，不计细数。今左壁箩剩一合，中间箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼，系甲乙丙三名。甲称当夜摸得马杓，在左壁箩，满舀入布袋，乙称踢着木履，在中箩，舀入袋。丙称摸到漆椀，在右壁箩，舀入袋，将归食用。日久不知数。索到之日，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆椀容一升二合。欲知所失米数，计赃结断三盗各几何。

问题归于解三元一次同余方程组。

已知：

剩米 $= u_j = 1, 14, 1$ (合)

器容 $= m_j = 19, 17, 12$ (合)

求：每箩米 $= u \equiv u_j \pmod{m_j}$

术曰，以大衍求之。

| | |
|---|---|
| 列三器所容，为元数； | 元数 (= 器容) |
| 连环求等，约为定母； | 定母 ($= m_j$) |
| (辗转相除求公因子) | |
| 以相乘，为衍母 | 衍母 $M = \Pi m_k$ |

| | |
|---|---|
| 以定各约衍母，得衍数 | 衍数 $M_j = M/m_j = m_1\cdots\widehat{m_j}\cdots m_r$ |
| 各满定母，去之，得奇 | 奇数 = Rem（衍数/定母）= Rem（$M_j/m_j$） |
| 以奇定，用大衍，求得乘率。 | （上式表示 $M_j$ 对 $m_j$ 求余数） |
| | 乘率 = $k_j$，用大衍求之 $k_j$*奇数≡1 mod 定母 |
| 以乘衍数，得用数。 | 用数 $N_j$ = 乘率*衍数 = $k_jM_j$ |
| 次以剩米乘用。 | 剩米 = $u_j$ |
| 并之，为总。 | 总数 = $\sum u_j N_j$ = $\sum$ 剩米*用数 |
| 满衍母，去之，不满，为每箩米。 | 每箩米 = Rem（总数/衍母） |
| 各以剩米减之，余为甲乙丙盗米。 | 盗米 = 每箩米 − 剩米 |
| 并之为共失米。 | 失米 = $\sum$盗米 |

这种方法可用于 $m_1$，…，$m_r$ 有公因子的情形。而此时西方的方法失效。

本题具体数字如下：

| 元 数 | |
|---|---|
| 定母 $m_j$ | 19 17 12 |
| 衍母 $M = \Pi m_j$ | 19 17 12 |
| 衍数 $M_j = M/m_j$ | $19\times17\times12 = 3876$ |
| 奇数 Rem($M_j/m_j$) | 204 228 323 |
| 乘率 （用大衍）$k_j$ | 14 7 11 |
| | 15 5 11 |
| | ($k_j$*Rem($M_j/m_j$) = 1mod $m_j$) |
| 用数 $N_j = k_jM_j$ | 3060 1140 3553 |
| 剩米 $u_j$ | 1 14 1 |
| 总 = $\sum$剩米*用数 | 3060 + 15960 + 3553 = 22573 |
| 每箩米 = Rem(总/衍母) | Rem(22573/3876) = 3193 |

关键一步，如何求乘率

$$k*\text{奇数} \equiv 1 \bmod \text{定母}$$

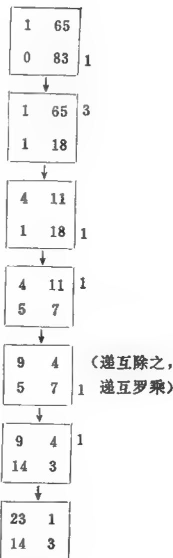
举同书第二卷中“分粜推原”为例说明。

奇数＝65，定母＝83。

求乘率 $k$ 使　　　　$k*\text{奇数} \equiv 1 \bmod \text{定母}$

大衍求一术云：

置奇右上，定居右下，
立天元一于左上。
所得商数，与左上相生入
　左下。
然后乃以右行上下，以少
　除多，递互除之。
所得商数，随即递互罗乘，
　归左行上下。
须使右上末后奇一而止，
乃验左上所得，以为乘率，
或奇数已见单一者，
便为乘率。



乘率 $k=23$

西法须求 $N=65^{\varphi(83)}=65^{82}$，简直无法计算，用大衍求一术做则效率相当高，其原理是：

记号 $\begin{array}{|cc|} c & r \\ c' & r' \end{array}$ 表示 $c*$ 奇数 $\equiv r \bmod$ 定母
$c'*$ 奇数 $\equiv -r' \bmod$ 定母

则

① $\begin{array}{|cc|} c & r \\ c' & r' \end{array} \xrightarrow[r=qr'+r'']{r>r'} \begin{array}{|cc|} c+qc' & r'' \\ c' & r' \end{array}$

证 $r+q(-r')=r'' \Rightarrow (qc'+c)*$奇 $\equiv r'' \bmod$ 定母

2 $\begin{array}{|cc|} c & r \\ c' & r' \end{array} \xrightarrow[r'=qr+r'']{r<r'} \begin{array}{|cc|} c & r \\ c'+qc & r'' \end{array}$

证 $qc+(-r')=-r'' \Rightarrow (qc+c')*$奇 $\equiv -r'' \bmod$ 定母

（本文是胡森、王东明根据作者在中科院研究生讲授《机器证明》课中一节整理而成，已经本人审阅。）

# 分角线相等的三角形*

## ——初等几何机器证明问题

### 一、一个古老问题："两条内分角线相等的三角形是等腰三角形"

初中课本里有一道题目：

求证等腰三角形两个底角的内分角线**相等。

这是初中生都会解决的简单问题。

但是，这个命题的逆命题：

**两条内分角线相等的三角形是等腰三角形，**

看起来十分简单，却并不是容易证明的。如果不信，请你自己试一试。

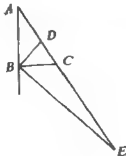
这是一个古老问题。

从古至今，有很多人用了很多方法证明这个逆命题，但都不是轻而易举的。下面举出其中比较起来简单些的几种证法。

---

*本文与吕学礼合写

** 三角形一个角的内分角线是指这个内角的平分线从顶点到与对边的交点间的线段，外分角线是指外角的平分线从顶点到与对边的交点间的线段。如图的 $\triangle ABC$ 中，$BD$ 是一条内分角线，$BE$ 是一条外分角线。



**1．利用反证法**

已知在$\triangle ABC$中，内分角线$BD$和$CE$相等。求证$AB=AC$（如图1）。

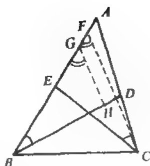


图1

证明：假定$AB\neq AC$。且设$AB>AC$。则$\angle ACB>\angle ABC$。因而$\frac{1}{2}\angle ACB>\frac{1}{2}\angle ABC$，即$\angle ACE>\angle ABD$。

在$\angle ACE$内，作$\angle ECF=\angle DBA$。则因$\angle ECB>\angle DBC$（分别等于$\frac{1}{2}\angle ACB$和$\frac{1}{2}\angle ABC$），所以仍有$\angle FCB>\angle FBC$。故得$BF>CF$。

在$BF$上取$G$点，使$BG=CF$。再作$GH\parallel FC$，与$BD$交于$H$。

那么在$\triangle BGH$和$\triangle CFE$中，$\angle GBH=\angle FCE$，$BG=CF$，$\angle BGH=\angle CFE$，因此$\triangle BGH\cong\triangle CFE$，而得$BH=CE$。

这和$BD=CE$相矛盾。

因此不可能有$AB>AC$。

同样，如果假定$AB<AC$，那么也会产生矛盾，因此也不可能有$AB<AC$。

这样就证明了$AB=AC$。

**2．利用直接证法**

已知在$\triangle ABC$中，内分角线$BD$和$CE$相等。求证$AB=AC$。

证明：命$\angle ABC=2\alpha$，$\angle ACB=2\beta$。

作$DF$使$\angle BDF=\beta$，作$BF$使$\angle DBF=\angle CEB$，如图2。

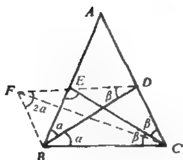



图 2

设 $DF$ 与 $BF$ 交于 $F$。 则在 $\triangle DBF$ 和 $\triangle CEB$ 中， $\angle BDF = \angle ECB$，$\angle DBF = \angle CEB$，且 $BD = EC$，故$\triangle DBF \cong \triangle CEB$，因此，$\angle BFD = \angle EBC = 2\alpha$，$BF = EB$。

$$\angle FBC = \angle FBD + \alpha = \angle BEC + \alpha = 180° - (2\alpha + \beta) + \alpha$$
$$= 180° - (\alpha + \beta),$$

$$\angle CDF = \angle CDB + \beta = 180° - (\alpha + 2\beta) + \beta = 180° - (\alpha + \beta),$$

并且 $2\alpha + 2\beta < 180°$，$\therefore \alpha + \beta < 90°$，$\therefore \angle FBC = \angle CDF > 90°$。又 $BC = DF$，$FC = CF$，$\therefore \triangle BCF \cong \triangle DFC$（两个三角形有两边及其中一边的对角分别相等，且这个对角为钝角，则两三角形全等）。$\therefore BF = DC$。

又因 $BF = EB$，所以 $DC = EB$。又 $DB = EC$，$BC = CB$，因此$\triangle DBC \cong \triangle ECB$。

$\therefore \angle DCB = \angle EBC$，$\therefore AB = AC$。

**3．代数证法**

已知、求证同（1）、(2)。设 $BC$、$CA$、$AB$ 的长分别为 $a$、$b$、$c$。则由内分角线的长的公式，根据 $BD = CE$ 可得

$$\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}\,, \qquad (1)$$

其中　$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

由（1）可得$(a+b)^2c(s-b)=(a+c)^2b(s-c)$，

化简，$a^2cs+b^2cs-2ab^2c-b^3c=a^2bs+c^2bs-2abc^2-c^3b$，

即　$a^2s(c-b)+bcs(b-c)-2abc(b-c)-bc(b^2-c^2)=0$，

$(b-c)(a^2s-bcs+2abc+b^2c+bc^2)=0$，

$(b-c)(a^2s-bcs+abc+bc\cdot 2s)=0$，

$$\therefore\quad (b-c)(a^2s+abc+bcs)=0。\qquad (2)$$

因$a>0$，$b>0$，$c>0$，$s>0$，故（2）式左边第二个因式$a^2s+abc+bcs>0$。

于是由（2）式可得$b-c=0$，即$\triangle ABC$为等腰三角形。

## 二、传统证法与机器证法

上节我们提到了一个命题“等腰三角形两个底角的内分角线相等”和它的逆命题“两条内分角线相等的三角形是等腰三角形”。原命题容易证明，而这个逆命题很难证明，这个逆命题成为一个古老问题，很多人想了很多方法加以证明。

读者们也许都有这个经验，用传统方法证明每一个稍难的初等几何命题，都要经过一番巧思。有的要添这样的辅助线，有的要添那样的辅助线。不同的命题有不同的证法，也就需要不同的巧思。一个新的命题需要通过新的巧思，找到新的证法。

下面我们粗略介绍利用电子计算机来证明初等几何命题的方法，简称机器证法。这种方法不是特殊地适用于个别的命题，而是普遍地适用于初等几何的所有命题，至少是某一类的很多命题。只要按照这种方法机械地进行，在有限步之后，就可对

这一类中的任何初等几何命题判定它是真是假。命题是真的，这个命题就得到了证明；命题是假的，这个命题就得到了否定。机器证明只需机械地进行，对于这类中的任何命题都是按照同样的步骤进行，不必对特殊的命题运用特殊的巧思。

初等几何的传统证明与机器证明之间的关系，就象应用题的算术解法与代数解法之间的关系。

为了通俗易懂，本文只能对机器证明介绍一些大致情况，读者如要了解它的详细情况以及基本原理，可请进一步参阅《几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分）》（科学出版社出版，吴文俊著）等书。

## 三、机器证法举例

为了说明机器证法的大意，我们先举一个极简单的例子。这个例子用传统证法完全可以轻易地解决。以它为例，只是为了说明机器证法的大致情况，为下面进一步说明机器证法作些准备。

求证：平行四边形的对角线互相平分。

设 $ABCD$ 为平行四边形，求证 $AC$、$BD$ 互相平分（如图 3）。

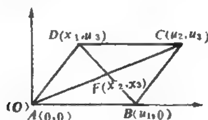



图 3

机器证法与解析几何方法相仿，也是先把几何问题化为代数问题。

以 $A$ 点为原点 $O$，以 $AB$ 为横轴，作成直角坐标系。

则 $A$ 点的坐标为$(0,0)$。设 $B$ 点的坐标为$(u_1,0)$，$C$ 点的坐标为$(u_2,u_3)$，$D$ 点的坐标为$(x_1,u_3)$，对角线 $BD$ 与 $AC$ 的交点 $E$ 的坐标为$(x_2,x_3)$。

这里 $u_1,u_2,u_3$ 是独立坐标，而 $x_1,x_2,x_3$ 是随着 $u_1,u_2,u_3$ 而确定的，所以不是独立坐标。$D$ 的纵坐标取得和 $C$ 的纵坐标一样，都是 $u_3$，这是已经运用了 $DC \parallel AB$ 的条件。在这里，这样做是为了使后面的说明更为简化而采取的特殊处理。实际上完全可以不必运用 $DC \parallel AB$ 的条件，而把 $D$ 的坐标取作$(x_1,x_2)$，$E$ 的坐标取作$(x_3,x_4)$，后面的说明仍能完全适用，不过略繁一些。

取好坐标以后，我们先把本题的题设部分表示成代数形式。

$AD \parallel BC$ 可以用 $\frac{u_3-0}{x_1-0}=\frac{u_3-0}{u_2-u_1}$ 表示(斜率相等)，但在机器证明中，不准许用分式，而把 $AD \parallel BC$ 用关于整式的等式来表示：

$$(u_3-0)(u_2-u_1)-(x_1-0)(u_3-0)=0,$$

即

$$u_3(u_2-u_1)-x_1u_3=0。\tag{1}$$

要注意等式(1)实际上并不只是表示一般的几何意义下的 $AD \parallel BC$，而是表示 $AD \parallel BC$，或 $A$ 与 $D$ 重合，或 $B$ 与 $C$ 重合，或 $AD$ 与 $BC$ 在同一条直线上等几种情况。这样做，虽然好象是扩大了我们原来关于平行的概念，但却有利于研究更为普遍的情况，并且也有利于找到关于机器证明的一个一般步骤。

$E$ 点在 $BD$ 上，在机器证明中可以用下面关于整式的等式

来表示：

$$x_3(x_1-u_1)-u_3(x_2-u_1)=0。\tag{2}$$

同样，$E$ 点在 $AC$ 上，可以用下式表示：

$$x_3u_2-x_2u_3=0。\tag{3}$$

(1)、(2)、(3)三式表示本题的题设部分（题设$DC \parallel AB$ 已在取坐标时用过了）。

下面再把本题的终结部分表示成代数形式。

$EA=EC$ 就是（机器证明中不用根式，改用$EA^2=EC^2$，下同）

$$x_2^2+x_3^2=(u_2-x_2)^2+(u_3-x_3)^2,$$

即
$$u_2^2-2u_2x_2+u_3^2-2u_3x_3=0。\tag{4}$$

$EB=ED$ 就是

$$(x_2-u_1)^2+x_3^2=(x_1-x_2)^2+(u_3-x_3)^2,$$

即
$$-2u_1x_2+u_1^2-x_1^2+2x_1x_2-u_3^2+2u_3x_3=0。\tag{5}$$

现在的问题就是怎样从本题的题设部分(1)、(2)、(3)推出本题的终结部分(4)、(5)。

我们通常的做法是，从(1)、(2)、(3)中解出 $x_1$、$x_2$、$x_3$，得到，在$u_1\neq0$，$u_3\neq0$ 的条件下*，

$$\begin{cases}x_1=u_2-u_1,\\ x_2=u_2/2,\\ x_3=u_3/2。\end{cases}$$

把它们代入(4)式的左边，得

$$u_2^2-2u_2\cdot\frac{u_2}{2}+u_3^2-2u_3\cdot\frac{u_3}{2},$$

---

* 从图 3 可以看到，$u_1\neq0$ 的几何意义是B点与A点不相重合；$u_3\neq0$ 的几何意义是DC与AB不在同一条直线上。对于我们所理解的平行四边形来说，这些条件显然是符合的。

这个式子恒等于0,所以(4)式成立。

把它们代入(5)式的左边,得

$$-2u_1\cdot\frac{u_2}{2}+u_1^2-(u_2-u_1)^2+2(u_2-u_1)\cdot\frac{u_2}{2}-u_3^2+2u_3\cdot\frac{u_3}{2},$$

这个式子也恒等于0,所以(5)式也成立。

这就证明了在$u_1\neq0$,$u_3\neq0$的条件下,本题中的命题是真的。

上面所说的是通常的做法,还不是机器证明。

机器证明用的是下面的方法。虽然对有些问题机器证明的方法似乎反而比通常的做法更繁,但是因为机器证明的方法有一定的步骤,可以通过一定的程序让机器来运行,而且对于较为复杂的问题通常的做法很难进行甚至无法进行,而机器证法则不管问题是简单的还是复杂的,都能同样按照一定的步骤进行,所以机器证明所用的下面的方法可以解决通常的做法不易解决或无法解决的问题。

方法如下。

第一步 先对命题的题设部分(1)、(2)、(3)三式,即

$$u_3(u_2-u_1)-x_1u_3=0, \qquad (1)$$

$$x_3(x_2-u_1)-u_3(x_2-u_1)=0, \qquad (2)$$

$$x_3u_2-x_2u_3=0 \qquad (3)$$

进行整理,使其中一个式子只能包含一个$x$,例如$x_1$,一个式子只能包含这个$x$和另一个$x$,例如$x_1$和$x_2$(或$x_1$和$x_3$),而一个式子可以包含三个$x$,即$x_1$,$x_2$,$x_3$。

对于这里的(1),(2),(3),这是很容易做到的。

(1)式中本来只含$x_1$。在$u_3\neq0$的条件下,(1)式就是我们

$$u_2-u_1-x_1=0$$

把它的左边(右边是零,下同)叫做$f_1$,那么(1)式就是(在$u_3\neq$

0 的条件下）

$$f_1 = u_2 - u_1 - x_1 = 0。\qquad (1')$$

(2)、(3)两式都是既有 $x_2$，又有 $x_3$。我们可以从中消去$x_2$。由(2)式减去(3)式，即得

$$x_3(x_1 - u_1 - u_2) + u_1u_3 = 0。$$

我们把它的左边叫做 $f_2$，就得

$$f_2 = x_3(x_1 - u_1 - u_2) + u_1u_3 = 0。\qquad (2')$$

再把(3)式的左边叫做 $f_3$，就得

$$f_3 = x_3u_2 - x_2u_3 = 0。\qquad (3')$$

上面的(1′)只含 $x_1$，(2′)只含 $x_1$和 $x_3$，(3′)含 $x_1, x_2$ 和 $x_3$（实际上不含 $x_1$）。这就达到了整理的目的。这样的整理叫做**三角化***。意思就是化成

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_1, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{matrix} \qquad \left( 或 \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_1, x_2 \\ x_1, x_2, x_3 \end{matrix} \right)$$

的形式。

把题设部分三角化以后，得到三个多项式：

$$f_1 = u_2 - u_1 - x_1,$$

$$f_2 = x_3(x_1 - u_1 - u_2) + u_1u_3,$$

$$f_3 = x_3u_2 - x_2u_3。$$

然后进行第二步。

第二步　把表示题目的终结部分的等式的左边（右边是0）用 $g$ 表示。例如把(4)式的左边用 $g_1$表示，即令

$$g_1 = u_2^2 - 2u_2x_2 + u_3^2 - 2u_3x_3。$$

---

* 严格说来，三角化还有其他一些要求，这里从略。

((5)式的左边用 $g_1$ 表示，以后再说。)

再把 $g_1$ 除以 $f_3$(两者都看作 $x_2$的多项式)，所得的余式除以 $f_2$(两者都看作 $x_3$ 的多项式)，又一次所得的余式除以$f_1$(两者都看作 $x_1$ 的多项式)，最后把所得的余式叫做 $R$，看 $R$ 是不是恒等于零。

实际进行如下。

把 $g_1$ 除以 $f_3$(都看作 $x_2$ 的多项式)。为了避免分式，我们用 $u_3g_1$ 除以 $f_3$，即

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad 2u_2 \\
\hline
-u_3x_2 + u_2x_3u & -2u_2u_3x_2 - 2u_3^2x_3 + u_2^2u_3 + u_3^3 \\
 & -2u_2u_3x_2 + 2u_2^2x_3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -2u_3^2x_3 - 2u_2^2x_3 + u_2^2u_3 + u_3^3
\end{array}
$$

这就得到

$$u_3g_1 = 2u_2f_3 + R_3, \tag{6}$$

其中 $\qquad R_3 = -2(u_2^2 + u_3^2)x_3 + u_3(u_2^2 + u_3^2)$。

把 $R_3$ 除以 $f_2$(都看作 $x_3$ 的多项式)。得到（除法算式从略，下同）

$$(x_1 - u_1 - u_2)R_3 = -2(u_2^2 + u_3^2)f_2 + R_2, \tag{7}$$

其中 $\quad R_2 = 2u_1u_3(u_2^2 + u_3^2) + u_3(u_2^2 + u_3^2)(x_1 - u_1 - u_2)$。

再把 $R_2$ 除以 $f_1$(都看作 $x_1$ 的多项式)。得到

$$R_2 = -u_3(u_2^2 + u_3^2)f_1 + R, \tag{8}$$

而其中的 $R$ 恒等于 0！

这就说明了在某些附加条件下，从本题的题设部分(1)、(2)、(3)三式可以推出本题的终结部分(4)式。

这是因为由(6)式可得

$$u_3(x_1 - u_1 - u_2)g_1 = 2u_2(x_1 - u_1 - u_2)f_3 + (x_1 - u_1 - u_2)R_3,$$

以(7)式代入，得

$$u_3(x_1 - u_1 - u_2)$$
$$g_1 = 2u_2(x_1 - u_1 - u_2)f_3 - 2(u_2^2 + u_3^2)f_2 + R_2,$$

再以(8)式代入，得

$$u_3(x_1 - u_1 - u_2)$$
$$g_1 = 2u_2(x_1 - u_1 - u_2)f_3 - 2(u_2^2 + u_3^2)f_2$$
$$- u_3(u_2^2 + u_3^2)f_1 + R。 \qquad (9)$$

(9)式可以写成下列形式：

$$c_1c_2g_1 = a_1f_3 + a_2f_2 + a_3f_1 + R。 \qquad (10)$$

其中 $c_1 = u_3$， $c_2 = x_1 - u_1 - u_2$， $a_1 = 2u_2(x_1 - u_1 - u_2)$， $a_2 = -2(u_2^2 + u_3^2)$， $a_3 = -u_3(u_2^2 + u_3^2)$。

由命题的题设部分(1)、(2)、(3)三式，可以推得 $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$；而由这里的除法计算，又得 $R = 0$。因此，由(10)式可得

$$c_1c_2g_1 = a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 0 + 0,$$

即 $$c_1c_2g_1 = 0。$$

由此可知，只要 $c_1 \neq 0$，$c_2 \neq 0$，就可推得本题的终结部分(4)式：

$$g_1 = 0。$$

这里的 $c_1 \neq 0$，$c_2 \neq 0$ 叫做附加条件。

上面所说的第二步，叫做逐次除法。本题第二步逐次除法的结果，得到恒等于零的余式 $R$。这就可以断定，在某些附加条件下，由本题的题设部分(1)、(2)、(3)三式可以推出本题的终结部分(4)式。

$c_1 \neq 0$ 就是 $u_3 \neq 0$，它的几何意义就是 $DC$ 和 $AB$ 不在同一直线上(如图3)。$c_2 \neq 0$ 就是 $x_1 - u_1 - u_2 \neq 0$，而由 $f_1 = 0$ 可得 $x_1 = u_2 - u_1$，因此 $c_2 \neq 0$ 就等价于 $u_1 \neq 0$，它的几何意义就是 $B$

点不与 $A$ 点重合（图 3）。因此，对于我们一般理解的平行四边形来说，这两个附加条件 $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$ 是成立的，由此本题的终结部分（4）式得证。（(5)式的证明见后）

从上面的例子可以看到，机器证明的思路是：先把几何问题化为代数问题，列出表示命题的题设部分和终结部分的只含整式的等式。这一步可由人工进行，一般不很烦难（也可编成程序，由机器进行）。然后进行三角化和逐次相除，这两步可以由机器按一定的程序进行。虽然我们用人工进行这两步觉得较繁，但是机器进行却是不怕繁的。即使余式多达几十项、几百项，它都不怕。如果最后得到的余式恒等于零，那就说明在某些附加条件下，从命题的题设部分可以推出终结部分，也就是说，在某些附加条件下，命题已经得到证明。

## 四、机器证法大意

上节我们举了机器证明初等几何命题的一个例子。本节借助这个例子来说明机器证明的大意。

通过上节的例子可以看到，机器证明初等几何命题，首先要把几何问题化成代数形式，用关于整式的等式写出命题的题设部分和终结部分。这是可由人工或机器进行的。

适当选择坐标系，即选取图形中适当的点作为原点，适当的直线作为坐标轴，往往可使后面的各个步骤以及问题的解决得到很大的简化。

选定坐标系后，我们可以把独立的各点（即它们的位置是可以任意选取的）的坐标用 $(u_1, u_2)$，$(u_3, u_4)$ 等表示。而把不独立的各点（即它们的位置是由其他点的位置所确定的）的

坐标用$(x_1,x_2)$,$(x_3,x_4)$等表示。哪些点是独立点,哪些点不是独立点,往往不是固定的。如果取某些点为独立点,那么其他点就不是独立点;如果取另一些点为独立点,那么其他的点就不是独立点。但在同一个问题中,独立坐标的个数则是确定的。当然,独立点的坐标和不独立点的坐标并不一定要用 $u$ 和 $x$ 来区分,但是这样区分一下,可以使后面的说明得到方便。

确定了点的坐标以后,初等几何中的一些关系(无论在题设中,或在终结中)可以化成代数形式如下。

1. 线段相等

如图 4,线段 $AB$ 的长度(即 $A$、$B$ 两点的距离)的平方为

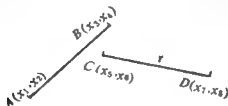



图 4

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2。$$

线段 $CD$ 的长度为 $r$,可以表示为

$$(x_5-x_7)^2+(x_6-x_8)^2-r^2=0。$$

线段$AB$与$CD$相等,可以改用它们的长度的平方相等表示为

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2-(x_5-x_7)^2-(x_6-x_8)^2=0。$$

2. 一点是两点的中点

如图 5,$B$ 是 $A$、$C$ 的中点,可以表示为

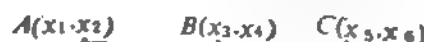



图 5

$$\begin{cases}2x_3-x_1-x_5=0,\\2x_4-x_2-x_6=0。\end{cases}$$

上面的两个等式在一起实际上表示“$B$是$A$、$C$的中点”或“$A$、$B$、$C$三点重合”。

**3．两线平行**

如图6，$AB\parallel CD$可以表示为

$$(x_4-x_2)(x_7-x_5)-(x_3-x_1)(x_8-x_6)=0。$$

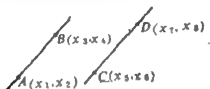



图6

这个等式可从$AB$与$CD$的斜率相等导出，但这个等式所表示的实际上是："$AB\parallel CD$"，或"$A$与$B$重合"，或"$C$与$D$重合"，或"$AB$与$CD$在同一条直线上"。

**4．两线垂直**

如图7，$AB\perp CD$可以表示为

$$(x_4-x_2)(x_8-x_6)+(x_3-x_1)(x_7-x_5)=0。$$

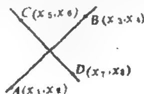



图7

这个等式可从$AB$与$CD$的斜率互为负倒数导出，但这个等式所表示的实际上是："$AB\perp CD$"，或"$A$与$B$重合"，或"$C$与$D$重合"。

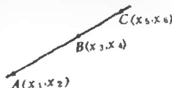



图8

**5．三点共线**

如图8，$A$、$B$、$C$三点共线

可以表示为

$$(x_4-x_6)(x_1-x_5)-(x_3-x_5)(x_2-x_6)=0。$$

这个等式可以从 $BC$ 与 $AC$ 的斜率相等导出，但这个等式所表示的实际上是："$A$、$B$、$C$ 三点共线"，或"其中有两点重合"，或"三点重合"。

熟悉行列式的读者可以看到，上面的等式与下面关于行列式的等式是一样的：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_4 & 1 \\ x_5 & x_6 & 1 \end{vmatrix}=0。$$

**6. 三线共点**

如图 9，$AB$、$CD$、$EF$ 三条直线都经过 $G$ 点，可以用三个等式来表示，这三个等式分别表示 $A$、$B$、$G$ 三点共线，$C$、$D$、$G$ 三点共线，以及 $E$、$F$、$G$ 三点共线。

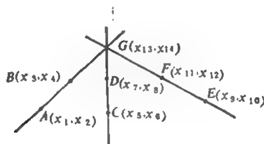



图 9

**7. 两角相等**

如图10，两角 $ABC$ 和 $DEF$ 相等，不但需要它们的度数相等，而且需要它们从始边($BA$,$ED$)旋转到终边($BC$,$EF$)的方向也相同(都是逆时针方向，或都是顺时针方向)。

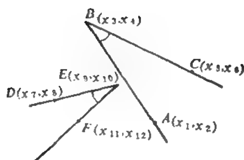



图 10

如果一个角从始边旋转到终边的方向是逆时针方向，那么这个角的正切值是$\frac{S_{终}-S_{始}}{1+S_{始}S_{终}}$，这里$S_{始}$、$S_{终}$分别表示这个角的始边和终边的斜率。

按此，图 10 中的 $\angle ABC=\angle DEF$（$\angle ABC$ 的始边为 $BA$，终边为 $BC$，其他同）可以表示为

$$[(x_6-x_4)(x_1-x_3)-(x_2-x_4)(x_5-x_3)][(x_{11}-x_9)(x_7-x_9)+(x_{12}-x_{10})(x_8-x_{10})]-[(x_{12}-x_{10})(x_7-x_9)-(x_8-x_{10})(x_{11}-x_9)][(x_5-x_3)(x_1-x_3)+(x_6-x_4)(x_2-x_4)]=0.$$

这个等式所表示的实际上是：

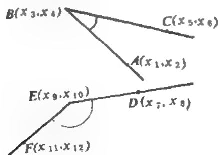



图 11

“$A$ 与 $B$ 重合”，或“$C$ 与 $B$ 重合”，或“$D$ 与$E$ 重 合”，或“$F$ 与 $E$ 重合”，或“$\angle ABC$与$\angle DEF$ 度数相同且旋转方向相同”（如图 10)，或“$\angle ABC$与$\angle DEF$ 度数相补且旋转方向相反”(如图 11)。

**8。点在分角线上**

如图 12，$P$ 点在$\angle ABC$ 的分角线上，可以表示为

$$[(x_8-x_4)(x_1-x_3)-(x_2-x_4)(x_7-x_3)][(x_5-x_3)(x_7-x_3)+(x_6-x_4)(x_8-x_4)]-[(x_6-x_4)(x_7-x_3)-(x_8-x_4)(x_5-x_3)][(x_7-x_3)(x_1-x_3)+(x_8-x_4)(x_2-x_4)]=0。$$

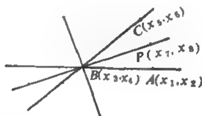



图 12

这个等式可从考虑$\angle ABP$的正切与$\angle PBC$ 的正切相等而得出。它所表示的实际上是“$A$ 与 $B$ 重合”，或“$C$ 与 $B$ 重 合”，或“$A$ 与 $C$重合”，或“$P$ 在$\angle ABC$ 的分角线上”，或 “$P$ 在$\angle ABC$ 的 邻补角的分角线上”。

**9。线段的比相等**

如图 13，线段 $AB$ 与 $CD$ 的(长度的)比等于 $r$，可以表示为

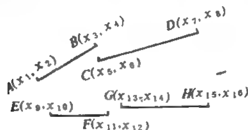



图 13

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2-r^2[(x_5-x_7)^2+(x_6-x_8)^2]=0。$$

这个等式实际上也表示“A 与 B 重合且 C 与 D 重合”的情形。

又线段 AB 与 CD 的比等于线段 EF 与 GH 的比(即线段 AB,CD,EF,GH 成比例),可以表示为

$$[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2][(x_{13}-x_{15})^2+(x_{14}-x_{16})^2]$$
$$-[(x_5-x_7)^2+(x_6-x_8)^2][(x_9-x_{11})^2+(x_{10}-x_{12})^2]=0。$$

这个等式就是表示线段 AB 与 GH 的积等于线段 CD 与 EF 的积，实际上也表示“A 与 B 重合且 C 与 D 重合”,或“A 与 B 重合且 E 与 F 重合”,或“G 与 H 重合且 C 与 D 重合”,或“G 与 H 重合且 E 与 F 重合”等情形。

10。一点分两点成定比

如图 14,P 点分 A、B 两点成定比 $r$,是指 P 在 A、B 所在的直线上,且有向线段 AP 与有向线段 PB 的比是 $r$。因此,P 点在 A、B 之间时 $r$ 为正(如图 14 的上图),P 点在 A、B 之外时 $r$ 为负(如图 14 的下图)。

P 点分 A、B 成定比 $r$，可以表示为

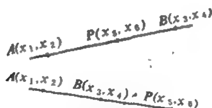



图 14

$$\begin{cases}x_5-x_1-r(x_3-x_5)=0,\\ x_6-x_2-r(x_4-x_6)=0。\end{cases}$$

这两个等式在一起实际上表示：“P 分 A、B 成定比 $r$”，或“A、B、P 三点重合”,或“A 与 B 重合且 P 不与 A、B 重合”。

**11．一点在一圆上**

如图 15,$P$ 点在以 $O$ 为圆心，以 $r$ 为半径的圆上，可以表示为

$$(x_3-x_1)^2+(x_4-x_2)^2=r^2。$$

当 $r$ 为零时,这个等式表示 $P$ 与 $O$ 重合。

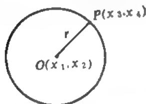



图 15

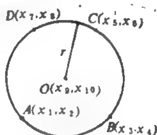



图 16

**12．四点共圆**

如图 16,四点 $A$、$B$、$C$、$D$ 共圆，可以设这个圆的圆心为 $O$，半径为 $r$，而把这四点共圆表示为

$$\begin{cases}(x_1-x_9)^2+(x_2-x_{10})^2=r^2,\\(x_3-x_9)^2+(x_4-x_{10})^2=r^2,\\(x_5-x_9)^2+(x_6-x_{10})^2=r^2,\\(x_7-x_9)^2+(x_8-x_{10})^2=r^2。\end{cases}$$

也可利用角的旋转方向及相等相补关系，把这四点共圆用本节“7.两角相等”中表示两角相等的式子来表示。例如在图 16 中 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点这样的位置情况下，$\angle ABD$ 与 $\angle ACD$ 旋转方向相同且度数相等，$\angle ABC$ 与 $\angle ADC$ 旋转方向相反且度数相补。

上面我们举出了把几何关系用代数形式来表示的几种情况。这里已经基本上包括了通常遇到的一些几何关系。如果另

外遇到这里没有提及的几何关系时，也可仿照这里的方法，把它们化成代数形式。

当要证明一个命题时，可以先把这个命题的题设部分和终结部分分别化成代数形式。这个工作可由人工或机器来进行。然后可以利用机器按照一定的程序进行下面两步工作。

第一步：三角化

把表示命题的题设部分的式子进行整理，得到一组关于整式的等式：

$$
\begin{aligned}
f_1&=0,\\
f_2&=0,\\
f_3&=0,\\
&\cdots\cdots\\
f_n&=0。
\end{aligned}
$$

其中各个 $f_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 都可以含有独立坐标 $u_1,u_2\cdots$，但 $f_1$ 只含有一个不独立坐标 $x_1$，$f_2$ 只含有 $x_1$ 和另一个不独立坐标 $x_2$，$f_3$ 只含有 $x_1$，$x_2$ 和另一个不独立坐标 $x_3$，$\cdots$，$f_n$ 可以含有所有的不独立坐标（设有 $n$ 个）。当然上面所说的不独立坐标不一定按 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的排列次序，而是可以按任何其他的排列次序。

第二步：逐次除法

把表示命题的终结部分的式子写成

$$g=0。$$

把 $g$ 除以 $f_n$（都看作 $x_n$ 的多项式），得

$$c_1g=a_1'f_n+R_n;$$

再把 $R_n$ 除以 $f_{n-1}$（都看作 $x_{n-1}$ 的多项式），得

$$c_2R_n=a_2'f_{n-1}+R_{n-1};$$

再把 $R_{n-1}$ 除以 $f_{n-2}$(都看作 $x_{n-2}$ 的多项式)，得

$$c_3R_{n-1}=a_3'f_{n-2}+R_{n-2};$$

$$\cdots$$

同样进行，最后得

$$c_{n-1}R_2=a'_{n-1}f_2+R_1;$$

$$c_nR_1=a_n'f_1+R_0$$

把上面的第一式乘以$c_2$，再把第二式代入，得

$$c_1c_2g=a_1'c_2f_n+a_2'f_{n-1}+R_{n-1};$$

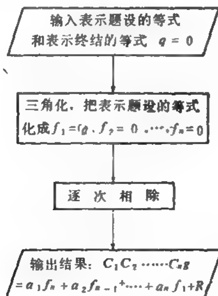
再把这个式子乘以 $c_3$，然后把第三式代入，得

$$c_1c_2c_3g=a_1'c_2c_3f_n+a_2'c_3f_{n-1}+a_3'f_{n-2}+R_{n-2};$$

依此进行，最后得

$$c_1c_2c_3\cdots c_ng=a_1f_n+a_2f_{n-1}+\cdots+a_nf_1+R_0 \quad (1)$$

上面的第一步三角化和第二步逐次除法是可以通过计算机来完成的。就是说，



这个过程，可以由计算机来完成，而且是切实可行的。就是说，不必动用大型的或超级的计算机，不必经年累月，耗费大量时间，即使对于一般认为是初等几何中的难题，只要利用普通的微型计算机，在合理的时间(例如几小时)以内就可完成。

从输出的结果(1)式，可以看到，如果最后所得的余式 $R$ 恒等于 0，那么在题设条件 $f_1=0, f_2=0, \cdots f_n=0$ 以及附加条件 $c_1\neq 0, c_2\neq 0, \cdots c_n\neq 0$ 下，一定可以得到终结条件 $g=0$。这就是说，在 $c_1\neq 0, c_2\neq 0, \cdots, c_n\neq 0$ 的附加条件下，命题已经得到证明。反之，如果没有得出余式 $R$ 恒等于 0，那么命题的成立与否还不一定，就是说，命题还在存疑之中。

以上只是介绍了机器证法的一个梗概。就是说，利用传统方法需要冥思苦想才能得到证明的一些初等几何命题，可以利用机器，通过一定的程序加以证明。

## 五、机器证法再举例

上节通过第三节的举例，说明了机器证法的大意。现在再举一些例子如下。下面一些例子，有的实际上根本用不到机器，只用人工就能解决，但是所用的方法则是机器证明所用的方法。有的虽要借助于一些机器计算，但也是比较简单的。

先举一个十分简单的例子。

例 1　求证：三角形的三条高线共点。

如图 17，选取坐标系，以 $\triangle ABC$ 的 $AB$ 边所在的直线为横轴，过 $C$ 点的高线为纵轴。设过 $A$ 点的高线与过 $C$ 点的高线相交于 $H$，且设各点的坐标为 $A(u_1,0)$，$B(u_2,0)$，$C(0,u_3)$，$H(0,x_1)$。

只要证明 $BH\perp AC$,本题即可得证。

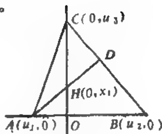



图 17

由题设 $AH\perp BC$,得

$$f_1=(x_1-0)(u_3-0)+(0-u_1)(0-u_2)=0。$$

而终结 $BH\perp AC$ 即

$$g=(x_1-0)(u_3-0)+(0-u_2)(0-u_1)=0。$$

可见 $f_1$ 与 $g$ 完全相同。

因此,$g$ 除以 $f_1$ 所得的余式 $R$ 当然为 0, 本题中的命题已被证明。

例 2　证明第三节中的(5)式。

这就是,从

$$f_1=u_1-u_2-x_1=0,$$
$$f_2=x_3(x_1-u_1-u_2)+u_1u_3=0,$$
$$f_3=x_3u_2-x_2u_3=0$$

推出

$$g_2=-2u_1x_2+u_1^2-x_1^2+2x_1x_2-u_3^2+2u_3x_3=0。$$

把 $g_2$ 除以 $f_3$(都看作 $x_2$ 的多项式),得

$$u_3g_2=-(-2u_1+2x_1)f_3+R_3,$$

其中

$$R_3=(-2u_1u_2+2u_2x_1+2u_3^2)x_3+u_1^2u_3-u_3x_1^2-u_3^3。$$

再把 $R_3$ 除以 $f_2$(都看作 $x_3$ 的多项式),得

$$(x_1-u_1-u_2)R_3=(-2u_1u_2+2u_2x_1+2u_3^2)f_2+R_2,$$

其中

$$R_2=-u_1u_3(-2u_1u_2+2u_2x_1+2u_3^2)+(x_1-u_1-u_2)(u_1^2u_3-u_3x_1^2-u_3^3)$$

$$= -u_3x_1^3 + (u_1u_3 + u_2u_3)x_1^2$$
$$+ (-2u_1u_2u_3 + u_1^2u_3 - u_3^3)x_1$$
$$+ (-u_1^3u_3 + u_1^2u_2u_3 - u_1u_3^3 + u_2u_3^3)。$$

最后把 $R_2$ 除以 $f_1$(都看作 $x_1$ 的多项式),得

$$R_2 = (u_3x_1^2 - 2u_1u_3x_1 + u_1^2u_3 + u_3^3)f_1 + R,$$

其中 $R$ 恒等于 0。

于是在 $u_3 \neq 0$ 及 $x_1 - u_1 - u_3 \neq 0$ 的附加条件下(5)式得证。$u_3 \neq 0$ 及 $x_1 - u_1 - u_2 \neq 0$ 的意义可见第三节靠近末尾的部分。

例 3　求证:菱形对角线互相垂直。

选取坐标系,使菱形的一个顶点 $A$ 为原点,一条边所在的直线为横轴,如图 18。

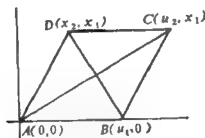



图 18

设 $A$、$B$ 的坐标分别为 $A(0,0)$, $B(u_1,0)$。因 $AB$ 与 $BC$ 的长度应相等,故 $C$ 点的坐标只能有一个为独立坐标,设 $C$ 点的坐标为 $(u_2, x_1)$。$D$ 点的两个坐标都不独立,且由 $AB \parallel DC$, $D$ 点的纵标与 $C$ 点的纵标相同,设 $D$ 点的坐标为 $(x_2, x_1)$。

由 $AD \parallel BC$,得

$$x_1(u_2 - u_1) - x_2 \cdot x_1 = 0。 \quad (1)$$

由 $AB = AD$,得

$$u_1^2-(x_2^2+x_1^2)=0。\qquad (2)$$

(1) 式中 $x_1 \neq 0$(否则 $DC$ 与 $AB$ 在同一直线上),故可把(1)、(2)两式三角化如下:

$$f_1=-x_2+(u_2-u_1)=0,$$

$$f_2=-(x_1^2+x_2^2)+u_1^2=0。$$

终结 $AC \perp BD$ 为

$$g=x_1 \cdot x_1+u_2 \cdot (x_2-u_1)=0。$$

把 $g$ 除以 $f_2$,得

$$g=-f_2+R_2,$$

其中 $$R_2=-x_2^2+u_2x_2-u_1u_2+u_1^2。$$

再把 $R_2$ 除以 $f_1$,得

$$R_2=(x_2-u_1)f_1+R,$$

其中 $R$ 恒等于零。于是命题得证。

例 4 求证:等腰梯形底角相等。

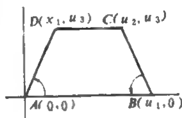



图 19

如图 19,选取坐标系并设 $A$、$B$、$C$、$D$ 各点的坐标。

由 $AD=BC$,得

$$f_1=x_1^2+u_3^2-(u_2-u_1)^2-u_3^2$$
$$=(x_1+u_2-u_1)(x_1-u_2+u_1)=0。$$

但因 $AD$ 与 $BC$ 不平行(梯形的定义),故

$$u_3 \cdot (u_2-u_1)-x_1 \cdot u_3 \neq 0。$$

因此 $x_1+u_1-u_2 \neq 0$,而上面的 $f_1=0$ 成为

$$f_1=x_1+u_2-u_1=0。$$

由第四节中的"7.两角相等",终结 $\angle BAD=\angle CBA$ 可以表示为

$$g = u_3u_1[-u_1(u_2-u_1)] - u_3u_1(x_1u_1)$$
$$= -u_1^2u_3(x_1+u_2-u_1) = 0。$$

因 $u_1 \neq 0$（$B$ 与 $A$ 不重合），$u_3 \neq 0$（$DC$ 与 $AB$ 不在同一条直线上），故由 $f_2 = 0$ 可以推得 $g = 0$，而命题得证。

例 5　求证：三角形两条中线的交点，分顶点与对边中点成 2:1。

选取两条中线的顶点所在的直线为横轴，其中一个顶点为原点，并设顶点 $A$、$B$、$C$ 的坐标如图 20。由第四节中的“2．一点是两点的中点”可得 $BC$ 边的中点 $D$ 和 $AC$ 边的中点 $E$ 的坐标。

设 $AD$ 和 $BE$ 的交点是 $G$。则由 $A$、$G$、$D$ 共线和 $B$、$G$、$E$ 共线可得

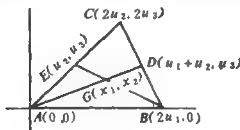


图 20

$$x_2(u_1+u_2) - x_1u_3 = 0,$$
$$x_2(u_2-2u_1) - (x_1-2u_1)u_3 = 0。$$

三角化得

$$f_1 = u_1u_3[3x_1 - 2(u_1+u_2)] = 0,$$
$$f_2 = x_2\cdot(u_1+u_2) - x_1u_3 = 0。$$

由第四节中的“10．一点分两点成定比”，终结 $G$ 分 $A$、$D$ 成 2:1 和 $G$ 分 $B$、$E$ 成 2:1 可以表示为

$$\begin{cases} g_1 = x_1 - 2(u_1+u_2-x_1) = 0, \\ g_2 = x_2 - 2(u_3-x_2) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_3 = x_1 - 2u_1 - 2(u_2 - x_1) = 0, \\ g_4 = x_2 - 2(u_3 - x_2) = 0。 \end{cases}$$

因 $u_1 \neq 0$($B$ 与 $A$ 不重合),$u_3 \neq 0$($C$ 点不在 $AB$ 直线上),故由 $f_1 = 0$ 可以推得 $g_1 = 0, g_3 = 0$。

$g_2 = 0$ 和 $g_4 = 0$ 都是 $g = 3x_2 - 2u_3 = 0$。

把 $g$ 除以 $f_2$,得

$$(u_1 + u_2)g = 3f_2 + R_2,$$

其中

$$R_2 = u_3[3x_1 - 2(u_1 + u_2)]。$$

再把 $R_2$ 除以 $f_1$,得

$$u_1R_2 = f_1 + R,$$

其中 $R$ 恒等于 0。

因 $u_1 \neq 0$,于是在 $u_1 + u_2 \neq 0$ 的条件下,命题得证。

若 $u_1 + u_2 = 0$,则三角化以前的题设成为

$$f_1 = -u_3x_1 = 0,$$

$$f_2 = -3u_1x_2 - u_3x_1 + 2u_1u_3 = 0。$$

而终结成为

$$\begin{cases} g_1 = 3x_1 = 0, \\ g_2 = 3x_2 - 2u_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_3 = 3x_1 = 0, \\ g_4 = 3x_2 - 2u_3 = 0。 \end{cases}$$

又因 $u_1u_3 \neq 0$,故由题设 $f_1 = 0, f_2 = 0$ 也可推出终结 $g_1 = 0, g_2 = 0, g_3 = 0, g_4 = 0$。

例 6　求证:直角三角形斜边上的高是斜边上两线段的比例中项。

选取坐标系及 $A$、$B$、$C$、$D$ 各点的坐标如图 21,其中 $AD$ 是

直角三角形 $ABC$ 斜边 $BC$ 上的高。

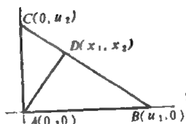


图 21

由 $AD \perp BC$，可得

$$x_2u_2 + x_1(-u_1) = 0。$$

由 $B$、$D$、$C$ 三点共线，可得

$$x_2\cdot(-u_1) - (x_1 - u_1)\cdot u_2 = 0。$$

三角化后，得

$$f_1 = u_1u_2^2 - (u_1^2 + u_2^2)x_1 = 0,$$

$$f_2 = x_2u_2 - x_1u_1 = 0。$$

终结 $AD^2 = BD\cdot DC$ 可以表示为

$$g = [(x_1 - u_1)^2 + x_2^2]\cdot[x_1^2 + (x_2 - u_2)^2] - (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0。$$

把 $g$ 除以 $f_2$(都看作 $x_2$ 的多项式)，得

$$u_2^2 g = [-2u_2^2x_2^2 + (u_2^3 - 4u_1u_2x_1 + u_1^2u_2)x_2$$

$$+ (5u_1u_2^2x_1 - 4u_1^2x_1^2 + u_1^3x_1 - 2u_2^2x_1^2 - 2u_1^2u_2^2)]f_2 + R_2,$$

其中 $$R_2 = -4u_1(u_1^2 + u_2^2)x_1^3 + (u_1^4 + 6u_1^2u_2^2 + u_2^4)x_1^2$$

$$-2u_1u_2^2(u_1^2 + u_2^2)x_1 + u_1^2u_2^4。$$

再把 $R_2$ 除以 $f_1$，得

$$R_2 = [4u_1x_1^2 - (u_1^2 + u_2^2)x_1 + u_1u_2^2]f_1 + R,$$

其中 $R$ 恒等于 0。

于是在 $u_2 \neq 0$($C$ 与 $A$ 不重合)的附加条件下，命题得证。

例 7　求证：从三角形外接圆上一点到三角形三边所作垂线的垂足共线(这线称为西摩松线：*Simson line*)。

取$\triangle ABC$ 的 $A$ 点为原点，$AB$ 边所在的直线为横轴。设它的外接圆的圆心为 $O$，半径为 $r$。设 $P$ 为外接圆上一点，它到$\triangle ABC$ 三边 $AB$、$BC$、$CA$ 所作垂线的垂足分别为 $L$、$M$、$N$。并设各点的坐标如图 22。

由 $B$、$C$、$P$ 在圆上，得

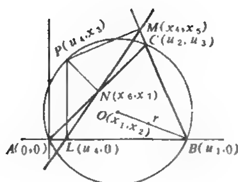



图 22

$$(u_1 - x_1)^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$(u_2 - x_1)^2 + (u_3 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$(u_4 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2。$$

由 $PM \perp BC$, $PN \perp AC$，得

$$(x_3 - x_5)u_3 + (u_4 - x_4)(u_2 - u_1) = 0,$$

$$(x_3 - x_7)u_3 + (u_4 - x_6)u_2 = 0。$$

由 $M$ 在 $BC$ 上，$N$ 在 $CA$ 上，得

$$x_5(u_2 - u_1) - u_3(x_4 - u_1) = 0,$$

$$x_7u_2 - x_6u_3 = 0。$$

经过三角化，得：

$$f_1 = 2u_1x_1 - u_1^2 = 0,$$

$$f_2 = 2u_3x_2 + 2u_2x_1 - u_2^2 - u_3^2 = 0,$$

$$f_3 = x_3^2 - 2x_2x_3 - 2u_4x_1 + u_4^2 = 0,$$

$$f_4 = u_3^2(x_4 - u_1) - x_3u_3(u_2 - u_1) + (x_4 - u_4)(u_2 - u_1)^2 = 0,$$

$$f_5 = x_5(u_2 - u_1) - u_3(x_4 - u_1) = 0,$$

$$f_6 = -x_6(u_2^2 + u_3^2) + x_3u_2u_3 + u_2^2u_4 = 0,$$

$$f_7 = x_7u_2 - x_6u_3 = 0。$$

终结 $L$、$M$、$N$ 共线可以表示为

$$g = x_7(x_4 - u_4) - (x_6 - u_4)x_5 = 0。$$

把 $g$ 除以 $f_7$(都看作 $x_7$ 的多项式),余式为(在某些条件下,下同)

$$R_7 = x_6u_1(x_4 - u_4) - u_2x_5(x_6 - u_4)。$$

把 $R_7$ 除以 $f_6$(都看作 $x_6$ 的多项式),余式为

$$R_6 = u_2x_3x_5 - u_3u_4x_5 - u_1x_3x_4 - u_2u_4x_4 + u_1u_4x_3 + u_2u_4^2。$$

把 $R_6$ 除以 $f_5$(都看作 $x_5$ 的多项式),余式为

$$R_5 = u_1u_2u_4x_4 - u_3^2u_4x_4 - u_2^2u_4x_4 + u_1u_3x_3x_4 - u_1u_2u_3x_3 - u_1u_3u_4x_3 + u_2u_3u_4x_3 + u_2^2u_4^2 - u_1u_2u_4^2 + u_1u_3^2u_4。$$

把 $R_5$ 除以 $f_4$(都看作 $x_4$ 的多项式),余式为

$$R_4 = (u_2u_3 - u_1u_3)x_3^2 + (2u_1u_2^2 - u_1^2u_2 - u_2^3 + u_1u_3^2 - u_2u_3^2)x_3 + u_2u_3u_4^2 - u_1u_3u_4^2 - u_1u_2u_3u_4 + u_1^2u_3u_4。$$

把 $R_4$ 除以 $f_3$(都看作 $x_3$ 的多项式),余式为

$$R_3 = (2u_2u_3x_3 - 2u_1u_3x_3)x_2 + (2u_2u_3u_4 - 2u_1u_3u_4)x_1 + 2u_1u_2^2x_3 - u_1^2u_2x_3 - u_2^3x_3 + u_1u_3^2x_3 - u_2u_3^2x_3 - u_1u_2u_3u_4 + u_1^2u_3u_4。$$

把 $R_3$ 除以 $f_2$(都看作 $x_2$ 的多项式),余式为

$$R_2 = (2u_1u_2x_3 - 2u_2^2x_3 + 2u_2u_3u_4 - 2u_1u_3u_4)x_1 + u_1u_2^2x_3 - u_1^2u_2x_3 - u_1u_2u_3u_4 + u_1^2u_3u_4。$$

再把 $R_2$ 除以 $f_1$, 余式为 0。

考察过程中所需的条件, 都能成立。因此命题得证。

例 7 因比较复杂, 是借助于电子计算机而得到解决的。

通过上面的一些例子，可以看到机器证法的大致情况。这些例子，有的十分简单，用人工就可解决，有的略为复杂，由机器帮助解决。这些例子的机器证法，虽然看起来反而比传统证法更为复杂，但是如前所述，机器证法是按一定的步骤进行的，不象传统证法没有一定的规律可循，对于每一个不同的问题都要另费一番思考。

机器证法有一定的步骤，不怕复杂，所以可以用机器证法解决许多难题。这些难题，用传统的综合方法来证，因为不易找到思路，所以十分困难。

例如，有一个著名难题，叫做 *Morley* 定理，是说任意三角形 $ABC$ 中，一个角的一条三等分线，与和它相邻的角的三等分线相交，象这样所得的交点 $P$、$Q$、$R$ 是一个正三角形的三个顶点（如图 23）。

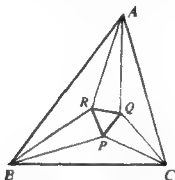



图 23

用传统方法证明 *Morley* 定理，非常艰难。用机器方法证明 *Morley* 定理，跟证明其他定理一样，有一定的步骤，只要按步进行就可以了。

进一步的研究表明，任意三角形中，一个角的三等分线，与和它相邻的角的三等分线相交，按一定的规则选取交点，共

可组成 27 个三角形，在这 27 个三角形中，一定有 18 个三角形是正三角形。*

用机器方法同样容易证明这个更一般的 *Morley* 定理。在证明过程中，不止一次地出现了关于 12 个变量的含有一千多项(有的有 1960 项)的多项式。象这样的问题，不用机器而用人工处理，当然是非常困难的。

## 六、回到前面的古老问题

说明了机器证法的大致情况并举了一些例子以后，我们再回到第一节所说的古老问题：

求证：两条内分角线相等的三角形是等腰三角形。看看怎样用机器证法来证明这个命题。

但是，对于这个古老问题来说，上面所说的方法还不够用，需要另外想一些办法。

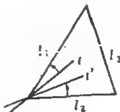
这是因为，上面所说的方法，适用于能把命题的题设部分

---

* 27 个三角形的组成如下。

设三角形的三边为 $l_1, l_2, l_3$。用 $\angle(l_1, l_2)$ 表示 $l_1, l_2$ 所成的角（要考虑旋转方向），我们规定能使 $3\angle(t, l_1)$ 等于 $\angle(l_2, l_1)$，或等于 $\angle(l_2, l_1)+180°$，或等于 $\angle(l_2, l_1)+360°$ 的 $t$ 为这个角的主三等分线。这样的主三等分线有三条。

对于每一条主三等分线 $t$，有一条相应的能使 $\angle(l_2, t')=\angle(t, l_1)$ 的副三等分线 $t'$。




$\angle(l_1, l_2)$ 的任一条主三等分线，与 $\angle(l_2, l_3)$ 的任一条主三等分线的相应副三等分线相交，得一交点，$\angle(l_2, l_3)$ 的这条主三等分线与 $\angle(l_3, l_1)$ 的任一条主三等分线的相应副三等分线相交，得一交点，$\angle(l_3, l_1)$ 的这条主三等分线与 $\angle(l_1, l_2)$ 的所取的主三等分线相应的副三等分线相交，得一交点。三个交点组成一个三角形。这样共组成 27 个三角形。

和终结部分都化为等式的情况，而不能用于化为不等式的情况。

在这个古老问题中，按照第四节“8.点在分角线上”所列的等式，只能确定一点是在$\triangle CAB$的$\angle CAB$的分角线上，而不能确定究竟是在内分角线上还是在外分角线上。但这个古老问题是要证明两条内分角线相等的三角形是等腰三角形，而对于两条外分角线相等的三角形来说，情况就大不一样，（见下节）。因此，在这个古老问题中，一点究竟在内分角线上，还是在外分角线上，有着决定性的重要关系。但是这一点却不能单独用第四节“8.点在分角线上”所列的等式来表示，而需要另外添加一个不等式。

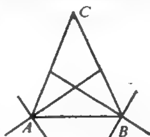


图 24

幸好，在这个古老问题中，所要添加的不等式是在题设部分，而不是在终结部分。这样，上面所说的机器证法只要稍加改进，就仍然能够适用。如果一个命题，在它的终结部分，需要用不等式来表示，那么上面所说的机器证法就无能为力了。这就是说，上面所说的机器证法，不能适用于终结部分需要用不等式来表示的命题（也就是涉及希尔伯脱 Hilbert 公理体系中有关次序公理的问题）。例如，上面所说的机器证法，不能用来证明象下面这类的命题：“三角形两边之和大于第三边”；“在一个三角形中，大角所对的边也大”；等等。

现在我们来看怎样改进一下上面所说的机器证明方法，可以用来证明这个古老问题。

如图 25，取$AB$的中点为原点，$AB$所在直线为横轴，且以

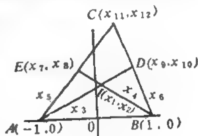


图 25

$AB$ 的长度的一半为单位长度。则 $A$，$B$ 的坐标为 $A(-1,0)$，$B(1,0)$。

设分角线 $AD$ 和 $BE$ 相交于 $I$，并设 $I$ 的坐标为 $I(x_1,x_2)$。设两条分角线 $AD$、$BE$ 的斜率分别为 $x_3$、$x_4$，$\triangle ABC$ 的两边 $AC$ $BC$ 的斜率分别为 $x_5$、$x_6$，$E$ 点的坐标为 $E(x_7,x_8)$，$D$ 点的坐标为 $D(x_9,x_{10})$，$C$ 点的坐标为 $C(x_{11},x_{12})$。

由 $AI$ 的斜率为 $x_3$，可得

$$x_3+x_1x_3-x_2=0。\tag{1}$$

由 $BI$ 的斜率为 $x_4$，可得

$$x_1x_4-x_4-x_2=0。\tag{2}$$

由 $AB$ 旋转到 $AI$ 所成的角等于 $AI$ 旋转到 $AC$ 所成的角，可得

$$x_5-x_3^2x_5-2x_3=0。\tag{3}$$

由 $BA$ 旋转到 $BI$ 所成的角等于 $BI$ 旋转到 $BC$ 所成的角，可得

$$x_6-x_4^2x_6-2x_4=0。\tag{4}$$

由 $AE$ 和 $AC$ 的斜率都等于 $x_5$，可得：

$$x_8-x_5x_7-x_5=0,\tag{5}$$

$$x_{12}-x_5x_{11}-x_5=0。\tag{6}$$

由 $BD$ 和 $BC$ 的斜率都等于 $x_6$，可得：

$$x_{10}-x_6x_9+x_6=0,\tag{7}$$

$$x_{12}-x_6x_{11}+x_6=0。\tag{8}$$

由 $A$、$I$、$D$ 共线，可得

$$x_{10}+x_1x_{10}-x_2x_9-x_2=0。\tag{9}$$

由 $B$、$I$、$E$ 共线，可得

$$x_8-x_1x_8+x_2x_7-x_2=0。\tag{10}$$

此外，又由分角线 $AD$ 与 $BE$ 相等，可得

$$x_{10}^2 + x_9^2 + 2x_9 - x_8^2 - x_7^2 + 2x_7 = 0。\tag{11}$$

上面所列的等式(3)、(4)，只能表示 $D$ 在 $\angle CAB$ 的分角线上，$E$ 在 $\angle CBA$ 的分角线上，而不能表示 $AD$、$BE$ 究竟是内分角线还是外分角线。

为了表示 $AD$、$BE$ 都是内分角线，我们添设两个条件：

1. $AD$ 和 $BE$ 的斜率的符号相反，这说明 $AD$ 和 $BE$ 同是内分角线或同是外分角线。

2. $AD$和$BE$的交点 $I$ 与 $C$ 点在 $AB$ 的同侧。

这两个条件合起来就可确定分角线 $AD$ 和 $BE$ 同是内分角线。

条件 1 用式子表示就是

$$x_3x_4<0。$$

为了用等式而不是用不等式来表示这个条件，我们可以设一个实数 $u$，而把上面的不等式写成下面的等式：

$$x_3x_4 = -u^2。\tag{12}$$

条件 2 可以表示为

$$x_2x_{12}>0。\tag{13}$$

本题的终结部分原来应是 $AC=BC$。但是，为了简便，可以用"$I$ 在纵轴上"来代替。这是因为，$I$ 在 $AB$ 的中垂线上，则 $IA=IB$，$\angle IAB=\angle IBA$，即可得$\angle CAB=\angle CBA$，从而 $AC=BC$。因此，终结部分可以表示为

$$x_1=0。\tag{14}$$

我们先把条件(13)暂且不管，留作以后讨论时用，而把(1)～(12)式三角化如下（利用机器）：

$$f_1 = -u^4x_1(1-x_1^2)^4\cdot f_0=0,$$

其中$f_0=(u^2-1)^2(u^2-2)(1-x_1^2)-4$；

$$f_2=x_2^2-u^2+u^2x_1^2=0;$$

$$f_3=x_3+x_1x_3-x_2=0;$$

$$f_4=x_1x_4-x_4-x_2=0;$$

$$f_5=(1+x_1)[(1+x_1-u^2+u^2x_1)\cdot x_5-2x_2]=0;$$

$$f_6=x_1^2x_6-2x_1x_6+x_6-u^2x_6+u^2x_1^2x_6-2x_1x_2+2x_2=0;$$

$$f_7=3x_2x_7-x_1^2x_2x_7+x_2-3x_1^2x_2+2x_1x_2x_7-u^2x_2x_7+u^2x_1^2x_2x_7-2x_1x_2+u^2x_2-u^2x_1^2x_2=0;$$

$$f_8=x_8-x_7x_5-x_5=0;$$

$$f_9=x_1^2x_2x_9-3x_2x_9-3x_1^2x_2+x_2+2x_1x_2x_9+u^2x_2x_9-u^2x_1^2x_2x_9+2\cdot x_1x_2+u^2x_2-u^2x_1^2x_2=0;$$

$$f_{10}=x_{10}-x_9x_6+x_6=0;$$

$$f_{11}=x_2(1-x_1^2)[x_{11}(1-u^2)-x_1(1+u^2)]=0;$$

$$f_{12}=x_{12}-x_5(x_{11}+1)=0。$$

下面我们实际上不必继续进行，因为在$f_1$中已经含有因式$x_1$，而$f_1$等于零。如果我们能够利用这些题设条件，加上题设条件(13)，证明$f_1$中的其他因式都不等于零，那么就能得出终结$x_1=0$。

在$f_1$中，有因式$-u^4$，$x_1$，$(1-x_1^2)^4$，以及$f_0=(u^2-1)^2(u^2-2)(1-x_1^2)-4$。

我们来考察除了$x_1$以外的其他因式能否为零，如果除了$x_1$以外的其他因式都不能为零，那么由$f_1=0$就可推出我们希望得到的终结$x_1=0$。

由(12)，$x_3x_4=-u^2$，而$x_3$，$x_4$分别是分角线$AD$和$BE$的斜率(如图25)，所以$x_3x_4\neq0$，因而$u\neq0$。

又在图 25 中，$x_1$ 表示两条分角线 $AD$ 和 $BE$ 的交点 $I$ 的横坐标，所以$x_1 \neq -1$，$x_1 \neq +1$，否则 $A$ 角或 $B$ 角就将成为 $180°$ 而不能构成$\triangle ABC$。从而可得 $1-x_1^2 \neq 0$。

由 $f_2=0$，可得 $1-x_1^2=\frac{x_2^2}{u^2}$，因此 $1-x_1^2>0$。

由 $f_5=0$，因 $1+x_1 \neq 0$，可得 $x_5=\frac{2x_2}{1+x_1-u^2+u^2x_1}$；

又由 $f_{11}=0$，因 $x_2 \neq 0$（$x_2$ 是分角线 $AD$ 的 $BE$ 的交点 $I$ 的纵坐标），$1-x_1^2 \neq 0$，可得 $x_{11}=\frac{x_1(1+u^2)}{1-u^2}$；代入 $f_{12}=0$，即得

$x_{12}=\frac{2x_1}{1-u^2}$，从而可得 $x_2x_{12}=\frac{2x_2^2}{1-u^2}$。

但由条件(13)，$x_2x_{12}>0$，于是可得$1-u^2>0$，即 $u^2<1$。

综上所述，在条件(12)、(13)成立的情况下，即在 $AD$、$BE$ 都是内分角线的情况下，$f_1$ 中的除了 $x_1$ 以外的其他因式 $-u^4 \neq 0$，$(1-x_1^2)^4 \neq 0$，且 $f_0=(u^2-1)^2(u^2-2)(1-x_1^2)-4<0$（$(u^2-1)^2>0$，$(1-x_1^2)>0$，$u^2-2<1-2<0$），即恒为负值而 $f_0 \neq 0$，因此由 $f_1=0$ 可以得到 $x_1=0$。

这样就证明了我们所要证明的古老问题：

**两条内分角线相等的三角形是等腰三角形。**

## 七、“两条外分角线相等的三角形是等腰三角形”，这个猜想成立吗？

上节证明了古老问题：“两条内分角线相等的三角形是等腰三角形。”

由此很容易引起我们产生下面的猜想："两条外分角线相等的三角形是等腰三角形"。这个猜想能不能成立呢？

举一个反例*，就可证明这个猜想不能成立！

设在图 26 的$\triangle ABC$中，$\angle A=132^\circ$，$\angle B=12^\circ$，$\angle C=36^\circ$。外角$CAF$的分角线$AD$与对边$BC$交于$D$，外角$ABG$的分角线$BE$与对边$AC$交于$E$。那么

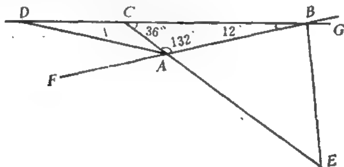



图 26

$$\angle CAD=\frac{1}{2}(180^\circ-132^\circ)=24^\circ,$$

$$\angle ACD=180^\circ-36^\circ=144^\circ,$$

∴ $$\angle D=12^\circ。$$

又 $$\angle ABE=\frac{1}{2}(180^\circ-12^\circ)=84^\circ,$$

$$\angle BAE=180^\circ-132^\circ=48^\circ,$$

∴ $$\angle E=48^\circ。$$

因此 $AD=AB$，$AB=BE$。

就是说，$\triangle ABC$的两条外分角线$AD$和$BE$相等，而$\triangle ABC$

---

* 见《数学通报》1983 年 1 月号问题及解答。

并不是等腰三角形。

再从更一般的情况来作直观的考察。

设$\triangle ABC$的$AB$边固定，$BC$边所在的射线也固定($\angle ABC$是小于$60°$的一个定角$\alpha$)，如图27。但$C$点的位置并不固定，可以在这条射线上移动，我们研究$C$点在这条射线上移动时所产生的情况。$BC$所在的射线既已固定，那么外角$ABG$的分角线$BE$(直线)也就确定了。

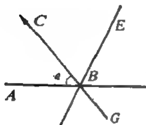


图27

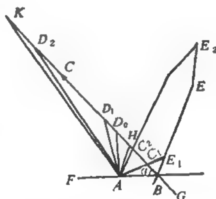


图28

如果$C$点接近$B$点，如图28中的$C_1$，那么外分角线$BE_1$接近于零，而外分角线$AD_1$接近于$AD_0$，$D_0$是从$A$所作$AB$的垂线与$BC$的交点。因此，在这个情况下，$AD_1>BE_1$。设过$A$所作$BE$的平行线与$BC$交于$H$，那么当$C$点接近于$H$点时，如图中的$C_2$，外分角线$BE_2$无限增大(图中有歪曲)，而外分角线$AD_2$接近于$AK$，$K$是外角$HAF$的分角线与$BC$的交点。因$\angle KAF=\frac{1}{2}\angle HAF=\frac{1}{2}\left[\alpha+\frac{1}{2}(180°-\alpha)\right]=45°+\frac{\alpha}{4}\neq\alpha$(因$\alpha\neq60°$)，所以$AK$不平行于$BC$，因而$AD_2$是有限值。因此，在这个情况下，$AD_2<BE_2$。

由此可见，$C$ 点从 $B$ 到 $H$ 连续运动时，由 $AD_1>BE_1$ 连续变化到 $AD_2<BE_2$，中间应至少有一处能使 $AD=BE$。

$C$ 点超过 $H$ 而接近于 $H$ 时，如前所说，仍有 $AD_2<BE_2$。如图29，作 $AM\parallel BC$，且作 $AF$ 对于 $AM$ 的对称线 $AN$，交 $BC$ 于 $N$。因 $\angle FAN=2\alpha$，$\angle FAH=180°-\alpha$，且 $\alpha<60°$，故 $\angle FAN<\angle FAH$。就是说，$N$ 点与 $B$ 点在 $H$ 点的异侧。当 $C$ 点接近 $N$ 点时，如图中的 $C_3$，$AC_3$ 就不与 $AH$ 接近，外分角线 $BE_3$ 是有限值。而 $\angle C_3AF$ 的分角线接近于 $AM$，因而外分角线 $AD_3$ 无限增大（图中有歪曲）。因此，在这个情况下，$AD_3>BE_3$。

图 29

由此可见，$C$ 点从 $H$ 到 $N$ 连续运动时，由 $AD_2<BE_2$ 连续变化到 $AD_3>BE_3$，中间应至少有一处能使 $AD=BE$。

综上所述，在 $AB$ 边固定且 $\angle ABC$ 固定（小于 $60°$）的前提下，至少有两个 $C$ 点（一在 $B$、$H$ 之间，一在 $H$、$N$ 之间）能使 $\triangle ABC$ 的外分角线 $AD$ 与 $BE$ 相等，而不是只有唯一的一个 $C$ 点（$AB$ 的中垂线与 $BC$ 的交点）。由此得出结论，两条外分角线相等的三角形不一定是等腰三角形。这就说明我们原来的猜想"两条外分角线相等的三角形是等腰三角形"不能成立。

从我们的机器证明来看，上节关于两条内分角线所列的(1)～(12)式以及由此推出的 $f_1=0, f_2=0, \cdots, f_{12}=0$ 等式都能适用于本节关于两条外分角线的情况，所不同的只是要把原来的

(13)式 $x_2 \cdot x_{12} > 0$ 改为

$$x_2 \cdot x_{12} < 0。\qquad (13')$$

于是，由 $x_2 x_{12} = \frac{2x_2^2}{1-u^2}$，可得$\frac{2x_2^2}{1-u^2} < 0$，即 $u^2 > 1$。因而 $f_1$ 中的因式 $f_0 = (u^2-1)^2(u^2-2)(1-x_1^2)-4$（其中 $1-x_1^2 = \frac{x_2^2}{u^2} > 0$）就不一定恒为负值，而可能为 0。这时，由 $f_1 = 0$ 就不能推出 $x_1$ 一定为 0，就是说，$\triangle ABC$ 不一定是等腰三角形。

由于 $1-x_1^2 = \frac{x_2^2}{u^2}$，即 $u^2 = \frac{x_2^2}{1-x_1^2}$，所以

$$f_0 = (u^2-1)^2(u^2-2)(1-x_1^2)-4 = 0$$

可以改写为

$$x_2^6 - 4x_2^4(1-x_1^2) + 5x_2^2(1-x_1^2)^2$$
$$-2(1-x_1^2)^3 - 4(1-x_1^2)^2 = 0。\quad (x_1^2 < 1)$$

我们知道，$(x_1, x_2)$ 是分角线 $AD$ 与 $BE$ 的交点 $I$ 的坐标。当 $I$ 点的坐标满足上述方程时，$I$ 点在某一个轨迹上。因此，从 $f_1 = -u^4 x_1(1-x_1^2)^4 f_0 = 0$，可以得出：或者 $x_1 = 0$，即$\triangle ABC$ 为等腰三角形；或者 $f_0 = 0$，即分角线 $AD$ 与 $BE$ 的交点 $I(x_1, x_2)$ 在上述方程所表示的轨迹上。

这就说明了，以 $AB$ 为一边，可以有无数个$\triangle ABC$，其中 $AC \neq BC$，而外分角线 $AD$ 等于外分角线 $BE$。这些三角形中，外分角线 $AD$ 与 $BE$ 的交点 $I$ 的轨迹是一个近似于椭圆的图形（如图 30），与过 $A$ 而垂直于 $AB$ 的直线相切，又与过 $B$ 而垂直于 $AB$ 的直线相切，它的最高点与 $A$、$B$ 两点恰好组成一个正三角形。按通常理解的三角形来说，这个轨迹要除去 $A$、$B$ 两点以及 $AB$ 的中垂线与轨迹相交的两点。

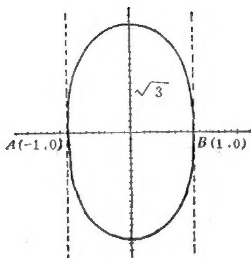



图 30

本书封面上用实线画出的一个三角形，不是等腰三角形，但它的两条外分角线(也用实线画出)相等。这两条外分角线所在直线的交点就在这样的轨迹上。

最后，再说一下一条内分角线与一条外分角线相等的三角形。研究结果表明，这样的三角形也不一定是等腰三角形。与两条外分角线相等的三角形的情况相仿，也有下面的情况：以 $AB$ 为一边，可以有无数个$\triangle ABC$，其中 $AC \neq BC$，而内分角线 $AD$ 等于外分角线 $BE$(或外分角线 $AD$ 等于内分角线 $BE$)。这些三角形中，$AD$ 与 $BE$ 的交点 $I(x_1, x_2)$的轨迹是一个近似于椭圆的图形，如图 31 中的右图(或左图)，它的方程是

$$x_2^6 + 4x_2^4(x_1^2 - 1) + 5x_2^2(x_1^2 - 1)^2 + 2(x_1^2 - 1)^3 - 4(x_1^2 - 1)^2 = 0。\quad (x>1 或 x<-1)$$

这个图形，与过 $B$ 及过 $P$ 而垂直于 $AB$ 的直线相切于 $B$ 及 $P$ (或与过 $A$ 及过 $Q$ 而垂直于 $AB$ 的直线相切于 $A$ 及 $Q$)，其中 $P$

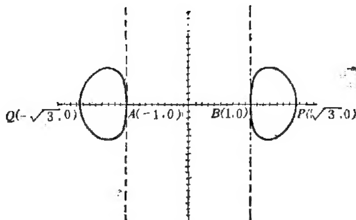



图 31

(或 $Q$)是在 $AB$ (或 $BA$) 的延长线上且与 $AB$ 的中点相距$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $AB$ 的点。按通常理解的三角形来说，轨迹上也应除去一些特殊的点。

* * *

通过上面所说，不难看到，机器证明有一定的优越性。本文只介绍一些大意和具体问题，不能过多谈到理论性问题。当然，这个问题还处在开创阶段，有待于进一步的发展与完善。